

2. Entscheidbarkeit, Halteproblem

Wir wollen nun zeigen, dass es keinen Algorithmus geben kann, der als Eingabe ein (beliebiges) Programm P und Daten x für P erhält und (für jedes solches Paar (P, x) !) **entscheidet**, ob P hält, wenn es mit Eingabe x gestartet wird.

Wir erinnern uns:

- 1 Eine Sprache A ist rekursiv gdw die charakteristische Funktion χ_A berechenbar ist.
- 2 Eine Sprache A ist rekursiv aufzählbar (r.a.) gdw die semi-charakteristische Funktion χ'_A berechenbar ist.

2.1 Rekursive Aufzählbarkeit

Definition 152

Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt **rekursiv auflistbar**, falls es eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Sigma^*$ gibt, so dass

$$A = \{f(0), f(1), f(2), \dots\}.$$

Bemerkung: Es ist nicht verlangt, dass die Auflistung in einer gewissen Reihenfolge (z.B. lexikalisch) erfolgt!

Beispiel 153

Σ^* (mit $\Sigma = \{0, 1\}$) ist rekursiv auflistbar. Wir betrachten dazu etwa folgende Funktion:

alle nullstelligen Wörter $f(0) = \epsilon$

alle einstelligen Wörter $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

alle zweistelligen Wörter $\begin{cases} f(3) = 00 \\ f(4) = 01 \\ f(5) = 10 \\ f(6) = 11 \end{cases}$

alle dreistelligen Wörter $\begin{cases} f(7) = 000 \\ \vdots \end{cases}$

Beispiel 153

Eine weitere Möglichkeit, eine Funktion f anzugeben, die alle Wörter $\in \{0, 1\}^*$ auflistet, ist:

$$f(n) = \text{Binärkodierung von } n + 1 \text{ ohne die führende } 1$$

Also:

$$f(0) = 1\epsilon$$

$$f(1) = 10$$

$$f(2) = 11$$

$$f(3) = 100$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Beispiel 153

$L_{TM} = \{w \in \{0, 1\}^*; w \text{ ist Codierung einer TM}\}$ ist rekursiv auflistbar:

Wir listen $\{0, 1\}^*$ rekursiv auf, prüfen jedes erzeugte Wort, ob es eine syntaktisch korrekte Codierung einer Turing-Maschine ist, und verwerfen es, falls nicht.

Wir wählen stattdessen die kanonische Auflistung von $\{0, 1\}^*$ und ersetzen jedes dabei erzeugte Wort, das keine korrekte Codierung darstellt, durch den Code einer Standard-TM, die \emptyset akzeptiert.

Satz 154

Eine Sprache A ist genau dann rekursiv auflistbar, wenn sie rekursiv aufzählbar (semi-entscheidbar) ist.

Beweis:

Wir zeigen zunächst „ \Rightarrow “.

Sei $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Sigma^*$ eine berechenbare Funktion, die A auflistet.

Betrachte folgenden Algorithmus:

lies die Eingabe $w \in \Sigma^*$

$x := 0$

while true do

if $w = f(x)$ **then return** („ja“); **halt fi**

$x := x + 1$

od

Beweis:

Wir zeigen nun „ \Leftarrow “.

Sei P ein WHILE-Programm, das die semi-charakteristische Funktion χ'_A berechnet, und sei f eine berechenbare Funktion, die Σ^* auflistet.

Betrachte folgenden Algorithmus:

lies die Eingabe $n \in \mathbb{N}_0$

$count := -1; k := -1$

repeat

$k := k + 1$

$w := f(c_1(k)); m := c_2(k)$

if P hält bei Eingabe w in genau m Schritten **then**

$count := count + 1$

until $count = n$

return w

Hier sind c_1 und c_2 die Umkehrfunktionen einer Paarfunktion. □

2.2 Halteproblem

Definition 155

Unter dem **speziellen Halteproblem** H_s versteht man die folgende Sprache:

$$H_s = \{w \in \{0, 1\}^*; M_w \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Hierbei ist $(M_\epsilon, M_0, M_1, \dots)$ eine berechenbare Auflistung der Turing-Maschinen.

Wir definieren weiter

Definition 156

$$L_d = \{w \in \Sigma^*; M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

Satz 157

L_d ist nicht rekursiv aufzählbar.

Beweis:

Wäre L_d r.a., dann gäbe es ein w , so dass $L_d = L(M_w)$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}M_w \text{ akzeptiert } w \text{ nicht} &\Leftrightarrow w \in L_d \\ &\Leftrightarrow w \in L(M_w) \\ &\Leftrightarrow M_w \text{ akzeptiert } w\end{aligned}$$

\implies Widerspruch!

Korollar 158

L_d ist nicht entscheidbar.

Satz 159

H_s ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Angenommen, es gäbe eine Turing-Maschine M , die H_s entscheidet. Indem man i.W. die Antworten von M umdreht, erhält man eine TM, die L_d entscheidet.

Widerspruch!

2.3 Unentscheidbarkeit

Definition 160

Unter dem (allgemeinen) Halteproblem H versteht man die Sprache

$$H = \{\langle x, w \rangle \in \{0, 1\}^*; M_x \text{ angesetzt auf } w \text{ hält}\}$$

Satz 161

Das Halteproblem H ist nicht entscheidbar.

Beweis:

Eine TM, die H entscheidet, könnten wir benutzen, um eine TM zu konstruieren, die H_s entscheidet.

Bemerkung: H und H_s sind beide rekursiv aufzählbar!

Definition 162

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$. Dann heißt A (effektiv) **reduzierbar auf** B gdw $\exists f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$, f total und berechenbar mit

$$(\forall w \in \Sigma^*)[w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B].$$

Wir schreiben auch

$$A \hookrightarrow_f B \text{ bzw. } A \hookrightarrow B.$$

bzw. manchmal

$$A \leq B \text{ oder auch } A \preceq_f B.$$

Ist A mittels f auf B reduzierbar, so gilt insbesondere

$$f(A) \subseteq B \text{ und } f(\bar{A}) \subseteq \bar{B}.$$

Satz 163

Sei $A \hookrightarrow_f B$.

- (i) B rekursiv $\Rightarrow A$ rekursiv.
- (ii) B rekursiv aufzählbar $\Rightarrow A$ rekursiv aufzählbar.

Beweis:

- (i) $\chi_A = \chi_B \circ f$.
- (ii) $\chi'_A = \chi'_B \circ f$.

Definition 164

Das Halteproblem auf leerem Band H_0 ist

$$H_0 = \{w \in \{0, 1\}^*; M_w \text{ hält auf leerem Band}\}.$$

Satz 165

H_0 ist unentscheidbar (nicht rekursiv).

Beweis:

Betrachte die Abbildung f , die definiert ist durch:

$$\{0, 1\}^* \ni w \mapsto f(w),$$

$f(w)$ ist die Gödelnummer einer TM, die, auf leerem Band angesetzt, zunächst $c_2(w)$ auf das Band schreibt und sich dann wie $M_{c_1(w)}$ (angesetzt auf $c_2(w)$) verhält. Falls das Band nicht leer ist, ist es unerheblich, wie sich $M_{f(w)}$ verhält.

f ist total und berechenbar.

Es gilt: $w \in H \Leftrightarrow M_{c_1(w)}$ angesetzt auf $c_2(w)$ hält
 $\Leftrightarrow M_{f(w)}$ hält auf leerem Band
 $\Leftrightarrow f(w) \in H_0$

also $H \xrightarrow{f} H_0$ und damit H_0 unentscheidbar.

Bemerkung

Es gibt also keine allgemeine algorithmische Methode, um zu entscheiden, ob ein Programm anhält.