Die Produktkonstruktion für DFAs

Zwei DFAs laufen parallel und synchron, ein Eingabewort wird akzeptiert gdw beide Automaten es akzeptieren.

Satz 45

Seien $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ *zwei DFAs. Dann ist der* *Produkt-Automat*

$$M := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$$

mit $\delta((q_1, q_2), a) := (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$ *für alle* $q_1 \in Q_1, q_2 \in Q_2$ *und* $a \in \Sigma$ *ein DFA, der* $L(M_1) \cap L(M_2)$ *erkennt.*

Beweis:

Induktion über $|w|$. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
w \in L(M) &\Leftrightarrow \hat{\delta}((s_1, s_2), w) \in F_1 \times F_2 \\
&\Leftrightarrow (\hat{\delta}_1(s_1, w), \hat{\delta}_2(s_2, w)) \in F_1 \times F_2 \\
&\Leftrightarrow \hat{\delta}_1(s_1, w) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(s_2, w) \in F_2 \\
&\Leftrightarrow w \in L(M_1) \wedge w \in L(M_2 \\
&\Leftrightarrow w \in L(M_1) \cap L(M_2)\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Frage: Funktioniert die Produktkonstruktion für den Durchschnitt auch bei NFAs?

Definition 46

Die Umkehrung(Spiegelung) eines Wortes $w = a_1 \cdots a_n$ ist

$$w^R := a_n \cdots a_1 \,.$$

Die Umkehrung einer Sprache L ist

$$L^R := \{w^R; w \in L\} \,.$$

Satz 47

Ist L eine reguläre Sprache, dann auch L^R.

Beweis:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA mit $L = L(M)$. Wir konstruieren einen ϵ-NFA $N = (Q \uplus \{q_0'\}, \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ wie folgt:

- wir kehren alle Übergänge um, d.h., $\delta(q, a) = p$ gdw $q \in \delta'(p)$;
- wir fügen einen neuen Startzustand q_0' hinzu, mit ϵ-Übergängen zu allen $f \in F$;
- wir machen q_0 zum (alleinigen) Endzustand von N.

Indem man die Folge der Übergänge von M bei einer beliebigen Eingabe $w \in \Sigma^*$ rückwärts verfolgt, ist nun leicht zu sehen, dass

$$L(N) = L^R\,.$$

$\square$

Definition 48

Substitution (mit regulären Mengen) ist eine Abbildung, die jedem $a \in \Sigma$ eine reguläre Sprache $h(a)$ zuordnet. Diese Abbildung wird kanonisch auf Σ^* erweitert.
Ein Homomorphismus ist eine Substitution, so dass für alle $a \in \Sigma$ die Menge $h(a)$ genau ein Wort enthält, also $|h(a)| = 1$.

Satz 49

Reguläre Sprachen sind unter (regulärer) Substitution, Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen.

Beweis:

Wir zeigen (nur) die Behauptung für den inversen Homomorphismus.
Sei $h : \Delta \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus, und sei $R \subseteq \Sigma^*$ regulär.

Zu zeigen: $h^{-1}(R) \subseteq \Delta^*$ ist regulär.

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F), L(A) = R$.

Betrachte $A' = (Q, \Delta, \delta', q_0, F)$, mit

$$\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, h(a)) \quad \forall q \in Q, a \in \Delta \ .$$

Also gilt

$$\hat{\delta}'(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, h(w)) \in F \Leftrightarrow h(w) \in R \Leftrightarrow w \in h^{-1}(R)$$

$\square$

Definition 50

Seien $L_1,\ L_2 \subseteq \Sigma^*$. Dann ist der Rechtsquotient

$$L_1/L_2 := \{x \in \Sigma^*;\ (\exists y \in L_2)[xy \in L_1]\}\ .$$

Satz 51

Seien $R, L \subseteq \Sigma^*$, R regulär. Dann ist R/L regulär.

Beweis:

Sei A DFA mit $L(A) = R$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$\begin{aligned} F' &:= \{q \in Q;\ (\exists y \in L)[\hat{\delta}(q, y) \in F]\} \\ A' &:= (Q, \Sigma, \delta, q_0, F') \end{aligned}$$

Dann ist $L(A') = R/L$. □

Lemma 52

Es gibt einen Algorithmus, der für zwei (nichtdeterministische, mit ϵ-Übergängen) endliche Automaten A_1 und A_2 entscheidet, ob sie äquivalent sind, d.h. ob

$$L(A_1) = L(A_2)\ .$$

Beweis:

Konstruiere einen endlichen Automaten für $(L(A_1) \setminus L(A_2)) \cup (L(A_2) \setminus L(A_1))$ (symmetrische Differenz). Prüfe, ob dieser Automat ein Wort akzeptiert. $\square$

Satz 53 (Pumping Lemma für reguläre Sprachen)

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ *regulär. Dann gibt es ein* $n > 0$*, so dass für jedes* $z \in R$ *mit* $|z| \geq n$ *es* $u, v, w \in \Sigma^*$ *gibt, so dass gilt:*

1. $z = uvw$,
2. $|uv| \leq n$,
3. $|v| \geq 1$, *und*
4. $\forall i \geq 0 : \; uv^i w \in R$.

Beweis:

Sei $R = L(A)$, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Sei $n = |Q|$. Sei nun $z \in R$ mit $|z| \geq n$.

Sei $q_0 = q^{(0)}, q^{(1)}, q^{(2)}, \ldots, q^{(|z|)}$ die beim Lesen von z durchlaufene Folge von Zuständen von A. Dann muss es $0 \leq i < j \leq n \leq |z|$ geben mit $q^{(i)} = q^{(j)}$.

Seien nun u die ersten i Zeichen von z, v die nächsten $j - i$ Zeichen und w der Rest.

$$\Rightarrow z = uvw, |v| \geq 1, |uv| \leq n, uv^l w \in R \quad \forall l \geq 0 \,.$$

$\square$

Beispiel für die Anwendung des Pumping Lemmas:

Satz 54

$L = \{0^{m^2};\ m \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*

Beweis:

Angenommen, L sei doch regulär.
Sei n wie durch das Pumping Lemma gegeben. Wähle $m \geq n$. Dann gibt es ein r mit $1 \leq r \leq n$, so dass gilt:

$$0^{m^2+ir} \in L \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0\ .$$

Aber:

$$m^2 < m^2 + r \leq m^2 + m < m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2\ !$$

□

Denkaufgabe:

$\{a^ib^i;\ i \geq 0\}$ ist nicht regulär.

Definition 55

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Definiere die Relation $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ durch

$$x \equiv_L y \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*)[xz \in L \Leftrightarrow yz \in L]$$

Lemma 56

$\equiv_L$ *ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation.*

Dabei bedeutet rechtsinvariant:

$$x \equiv_L y \Rightarrow xu \equiv_L yu \text{ für alle } u\ .$$

Beweis:

Klar! $\square$

Satz 57 (Myhill-Nerode)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann sind äquivalent:

1. *L ist regulär*
2. *$\equiv_L$ hat endlichen* Index *(= Anzahl der Äquivalenzklassen)*
3. *L ist die Vereinigung einiger der endlich vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_L$.*

Beweis:
(1)⇒(2):

Sei $L = L(A)$ für einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Dann gilt

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) \quad \Rightarrow \quad x \equiv_L y \; .$$

Also gibt es höchstens so viele Äquivalenzklassen, wie der Automat A Zustände hat.

Beweis:

(2)⇒(3):

Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse von x, $y \in [x]$ und $x \in L$.

Dann gilt nach der Definition von $\equiv_L$:

$$y \in L$$

Beweis:

(3)⇒(1):

Definiere $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit

$$
\begin{aligned}
Q' &:= \{[x];\ x \in \Sigma^*\} && \text{(}Q'\text{ endlich!)}\\
q_0' &:= [\epsilon] \\
\delta'([x], a) &:= [xa] \quad \forall x \in \Sigma^*, a \in \Sigma && \text{(konsistent!)}\\
F' &:= \{[x];\ x \in L\}
\end{aligned}
$$

Dann gilt:

$$L(A') = L$$

□