

Satz 43

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

“ \implies ”:

Sei also $L = L(\gamma)$.

Wir zeigen: \exists NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe **struktureller** Induktion.

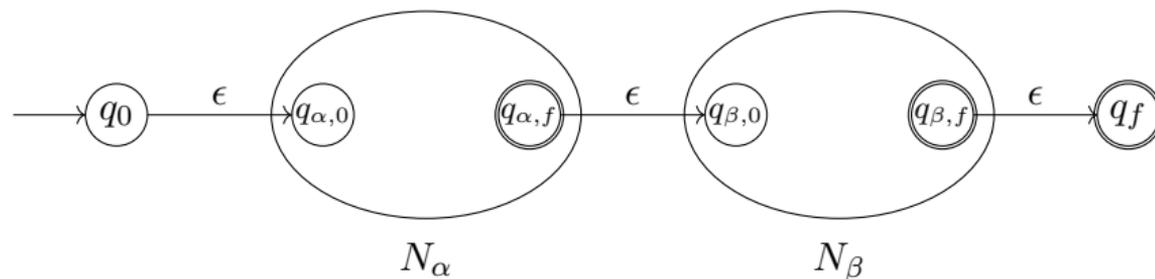
Induktionsanfang: Falls $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \epsilon$, oder $\gamma = a \in \Sigma$, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Induktionsschritt:

$$\gamma = \alpha\beta:$$

nach Induktionsannahme \exists NFA N_α und N_β mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta) .$$

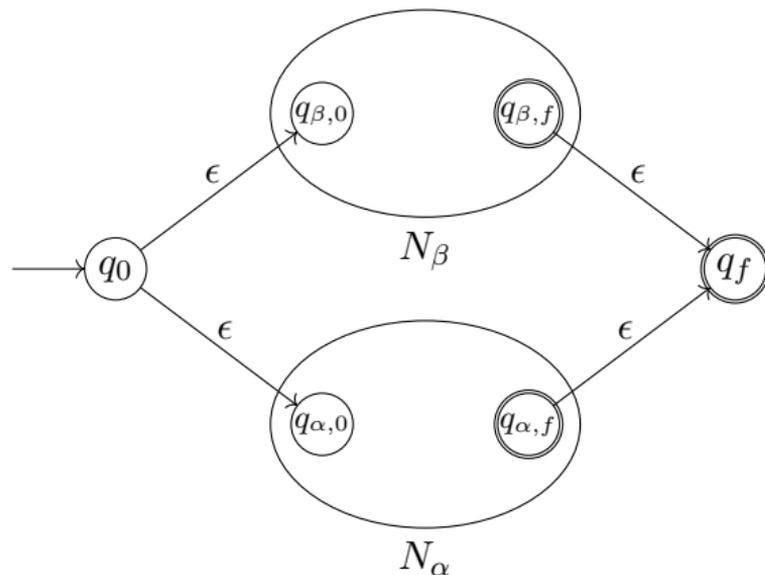


Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha \mid \beta)$:

nach Induktionsannahme \exists NFA N_α und N_β mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta) .$$

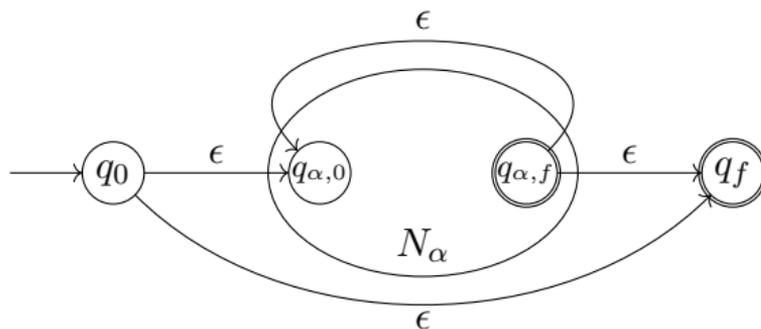


Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha)^*$:

nach Induktionsannahme \exists NFA N_α mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha) .$$



“ \Leftarrow ”:

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Wir zeigen: es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$. Wir setzen

$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^*; \text{ die Eingabe } w \text{ überführt den im Zustand } q_i \text{ gestarteten Automaten in den Zustand } q_j, \text{ wobei alle zwischendurch durchlaufenen Zustände einen Index kleiner gleich } k \text{ haben}\}$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{0, \dots, n\}$ und alle $k \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}$ gilt: Es gibt einen regulären Ausdruck α_{ij}^k mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

Bew.:

Induktion über k :

$k = -1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{-1} := \begin{cases} \{a \in \Sigma; \delta(q_i, a) = q_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma; \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{falls } i = j \end{cases}$$

R_{ij}^{-1} ist also endlich und lässt sich daher durch einen regulären Ausdruck α_{ij}^{-1} beschreiben.

Bew.:

Induktion über k :

$k \Rightarrow k + 1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^k \cup R_{i k+1}^k (R_{k+1 k+1}^k)^* R_{k+1 j}^k$$
$$\alpha_{ij}^{k+1} = (\alpha_{ij}^k \mid \alpha_{i k+1}^k (\alpha_{k+1 k+1}^k)^* \alpha_{k+1 j}^k)$$

Somit gilt: $L(M) = L((\alpha_{0 f_1}^n \mid \alpha_{0 f_2}^n \mid \cdots \mid \alpha_{0 f_r}^n))$, wobei f_1, \dots, f_r die Indizes der Endzustände seien.

□(Satz 43)

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 44

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Dann sind auch

$$R_1 R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=:\bar{R}_1), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1 R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$: Sei $R_1 = L(A)$, A DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$,
 δ vollständig.

Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$.

Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$

$R_1 \cap R_2$: De Morgan

