Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Übungsblatt 8
2. Juni 2014

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 18. Juni 2014, 10 Uhr in die* **DWT Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ unabhängige diskrete Zufallsvariable, die gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 20\}$ sind. Wir nehmen Zufallsvariablen $Y_i \sim \text{Bin}(1; \frac{8}{20})$ an, die genau dann den Wert 1 liefern, wenn $X_i > 12$ gilt.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Chernoff-Schranke nach Vorlesung eine möglichst gute obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100} \geq 50\,.$$

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten ein Münzwurfexperiment, das darin besteht, jede von drei unterschiedlichen Münzen $A$ bzw. $B$ bzw. $C$ so lange zu werfen, bis Kopf erscheint. Dabei nehmen wir an, dass die Erfolgswahrscheinlichkeiten für einen einzigen Wurf mit $A$ bzw. $B$ bzw. $C$ die Werte $p_1 = \frac{1}{3}$ bzw. $p_2 = \frac{1}{2}$ bzw. $p_3 = \frac{2}{3}$ sind. Die Münzen $A$ und $C$ sind also unfair.

$X_A$ bzw. $X_B$ bzw. $X_C$ seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen, die die Anzahl der Würfe mit $A$ bzw. $B$ bzw. $C$ zählen. Die Gesamtzahl der Würfe sei gegeben durch die Zufallsvariable $Y = X_A + X_B + X_C$ .

1. Sei $G_Y(s)$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für $Y$. Bestimmen Sie $G'_Y(0)$ .
2. Sei $f_Y$ die Dichtefunktion von $Y$. Bestimmen Sie $f_Y(4)$ .
3. Bestimmen Sie den Erwartungwert $\mathbb{E}[Y]$ .
4. Zeigen Sie $\Pr[Y \geq 16{,}5] \leq \frac{1}{10}$ .

   Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung von Chebyshev.

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X$ eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n = 4$ und $p = \frac{1}{2}$, d.h. $X \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{2})$.

1. Geben Sie die erzeugende Funktion $G_X(s)$ in geschlossener Form an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert der bedingten Variablen $X|X \neq 2$.

3. Ein Experiment bestehe darin, dass die Zufallsvariable $X$ wiederholt ausgewertet wird, und zwar so oft, bis bei der $n$-ten Wiederholung der Wert 2 erstmalig erscheint. Dann wird die Summe der aufgetretenen Werte $\neq 2$ gebildet.

   Sei $X_i$ für $i \in \mathbb{N}$ die $i$-te Wiederholung von $X$, sei $N$ die Zufallsvariable, die die Nummer $n$ der letzten Wiederholung darstellt, und sei $S = \sum_{i=1}^{N-1} X_i$.

   Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ von $S$.

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $M_1$ eine Maschine, die bei Aufruf zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 ausgibt. Wir bezeichnen die entsprechende Zufallsvariable mit $N$. Eine Maschine $M_2$ werfe bei Aufruf eine faire Münze, die entweder „Kopf“ oder „Wappen“ zeigt.

Wir betrachten einen Algorithmus $A$, dessen Ausführung in 2 Schritten ein Ergebnis erzeugt. Im ersten Schritt wird $M_1$ veranlasst, eine Zahl $k$ auszugeben. Im zweiten Schritt wird $M_2$ $k$ mal aufgerufen. Das Ergebnis einer Ausführung von $A$ definieren wir als diejenige Zahl, die angibt, wie oft im zweiten Schritt „Kopf“ geworfen wurde.
Es sei $Y$ die Zufallsvariable, die die Ergebnisse des Algorithmus $A$ beschreibt.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_N(z)$ für $N$ an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.
3. Berechnen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_Y(z)$ für $Y$.

***Hinweis:*** *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

## Vorbereitung 1

Seien $X_1$ und $X_2$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern $\lambda_1$ bzw. $\lambda_2$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion von $Y = X_1 + X_2$ durch Anwendung der Faltungsformel

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y - x) \, \mathrm{d}x$$

   und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ so weit wie möglich.

2. Seien $X_1, X_2, X_3$ unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter $\lambda$ und $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y$ in geschlossener Form.

## Vorbereitung 2

Sei $X$ eine kontinuierliche Zufallsvariable.

1. Zeigen Sie: Falls $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $2X + 1 \sim \mathcal{N}(5, 2)$.
2. Seien $d_1, d_2, c \in \mathbb{R}$ mit $d_1 < d_2$ und $c > 0$. Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass für $Y = aX + b$ gilt

$$\Pr[d_1 \leq X \leq d_2] = \Pr[-c \leq Y \leq c] \,.$$

## Vorbereitung 3

Wir betrachten unabhängige stetige Zufallsvariablen $X$ und $Y$, die beide auf dem Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ gleichverteilt sind. Sei $Z = \max\{X, Y\}$.

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Z$.
2. Bestimmen Sie eine Funktion $u : [0, 1] \to [0, 1]$, so dass $u(X)$ die gleiche Verteilung wie $Z$ besitzt.

## Tutoraufgabe 1

Seien $X$ und $Y$ kontinuierliche Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy^2 & : \quad 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Randdichte $f_X(x)$.
2. Bestimmen Sie den Wert der Verteilungsfunktion $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
3. Zeigen Sie die Unabhängigkeit der Variablen $X$ und $Y$.

## Tutoraufgabe 2

In einem Unfallkrankenhaus treffen im Schnitt alle 20 Minuten Patienten zur Behandlung ein. Die Zeit zwischen zwei Behandlungsfällen sei exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{20}$. Wenn 1 Stunde lang kein Patient eingetroffen ist, macht das Personal Ruhepause. Wir wollen wissen, welcher Zeitabstand zwischen zwei Ruhepausen zu erwarten ist.
Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Zeitspannen zwischen dem Eintreffen zweier Behandlungsfälle und $W$ die Wartezeit bis zur nächsten Ruhepause.

1. Geben Sie $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 60]$ an.
2. Geben Sie $\mathbb{E}[W \mid T_1 \geq 60]$ an.
3. Berechnen Sie $\mathbb{E}[W]$.

## Tutoraufgabe 3

Wir benutzen die Funktion $h(t) = 0.027 + 0.0025 \cdot (t - 40)^2$ für $t \in \mathbb{R}$, um die „Sterblichkeitsrate“ durch Lungenkrebs von Kettenraucherinnen abzuschätzen, die mindestens $t \geq 40$ Jahre alt sind. Ihre Lebensdauer sei $X$ und es gelte

$$\Pr[X > t \,|\, X > 40] = \exp\left( - \int_{40}^{t} h(s) \mathrm{d}s \right) .$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 45-jährige Kettenraucherin mindestens 50 Jahre alt wird?