
Diskrete Strukturen

Arbeitsblatt 1: Zahlen (zu Übungsblatt 1)

Hinweis: *Arbeitsblätter in diesem Semester dienen grundsätzlich der selbstständigen Vorbereitung von Hausaufgaben und Tutoraufgaben mit thematischen Schwerpunkten. Arbeitsblatt 1 dient der Vorbereitung der Hausaufgaben des ersten Übungsblattes. Die behandelten Themen sind zunächst gymnasialer Schulstoff.*

Die Mathematik baut auf elementaren Zahlen auf. Dies sind die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen, und schließlich die komplexen Zahlen als ein erster krönender Abschluss. Mit diesen Zahlen sind elementare Operationen verbunden. Dies sind Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division. Man nennt sie die „arithmetischen“ Operationen.

Zahlen ebenso wie die genannten Operationen sind logisch-geistige Gegenstände und erfordern naturgemäß eine allererste FORMALISIERUNG, d. h. eine Benennung oder Darstellung, um überhaupt über sie reden bzw. kommunizieren zu können. Eine Darstellung ist dabei stets ein Text, z. B. eine Folge von Ziffern 2012 oder z. B. ein Dezimalbruch. Operationen werden mit Symbolen wie $+$, \cdot bezeichnet, und eine Kombination von Operationen, angewandt auf gewisse Zahlen, werden durch sogenannte „arithmetische Ausdrücke“ dargestellt, wobei in diesen Ausdrücken Variable enthalten sein dürfen, die man für konkrete Rechnungen durch Zahlen ersetzt. Wir werden einen arithmetischen Ausdruck häufig einfach *Ausdruck* nennen.

Aufgabe 1 (Natürliche Zahlen)

Die natürliche Zählung beginnt bei 1 und kann beliebig fortgesetzt werden. Sie durchläuft dabei alle *natürlichen Zahlen* $1, 2, 3, \dots$, das heißt $1, 2, 3$ und *unbeschränkt so weiter*. „Versieht“ man die natürlichen Zahlen mit Vorzeichen ($+$, $-$) und fügt die Null 0 hinzu, dann erhält man die *ganzen Zahlen*. Die ganzen Zahlen mit Vorzeichen $+$ bzw. $-$ heißen positive bzw. negative ganze Zahlen. Offenbar entsprechen die natürlichen Zahlen den positiven ganzen Zahlen.

Für die natürlichen Zahlen sind (die Operationen) *Addition* ($+$) und *Multiplikation* (\cdot) aus der Schule bekannt. Für die ganzen Zahlen sind Addition und Multiplikation, und zusätzlich auch die *Subtraktion* ($-$) wohlbekannt. Für alle natürlichen bzw. ganzen Zahlen gibt es darüber hinaus bekanntlich die (Größen-)Beziehung *kleiner* ($<$) und *gleich* ($=$), und *kleiner-gleich* (\leq) bedeutet kleiner oder gleich.

Für natürliche Zahlen werden wir meist die Dezimaldarstellung (ohne führende Nullen) verwenden, beispielweise den (textuellen) arithmetischen Ausdruck 2012 (und nicht 02012)

für die gemeinte oder bedeutete Zahl. Auch die Darstellung der entsprechenden Operationen ist aus der Schule bekannt. Der arithmetische Ausdruck $2 + 3$ heißt *Summe* mit *erstem Summanden* 2 und *zweitem Summanden* 3. Die AUSWERTUNG des arithmetischen Ausdrucks $2 + 3$ liefert bekanntlich 5 als *Wert der Summe*. Entsprechend heißt der arithmetische Ausdruck $2 \cdot 3$ *Produkt* mit dem *Multiplikanden* (oder *erstem Faktor*) 2 und dem *Multiplikator* (oder *zweitem Faktor*) 3. Die Auswertung des arithmetischen Ausdrucks $2 \cdot 3$ liefert bekanntlich 6 als *Wert des Produkts*. Der Ausdruck $2 - 3$ heißt *Differenz* mit dem *Minuenden* 2 und dem *Subtrahenden* 3. Der *Wert der Differenz* ist hier gleich der (negativen) ganzen Zahl -1 .

Ein Summand, Faktor, Minuend oder Subtrahend ist ein arithmetischer (Teil-)Ausdruck, der nicht notwendigerweise die direkte Darstellung einer Zahl oder eine Variable sein muss. Er kann selbst eine Summe, ein Produkt oder eine Differenz sein und muss dann allerdings geklammert werden oder die Klammerung muss nach gewissen Regeln ersichtlich sein. Man beachte, dass der Begriff „Ausdruck“ eine mathematische Formel bedeutet, die gewissen, oben angedeuteten Bildungsgesetzen gehorcht.

Analyse: Es gibt eine alternative Beschreibung (Analyse) von Ausdrücken, z. B. von $(3 \cdot (1 - 2)) + 1$ wie folgt:

Wir bezeichnen $(3 \cdot (1 - 2)) + 1$ mit A . Dann ist A eine Summe. Der erste Summand von A ist ein Produkt, dessen Multiplikand 3 ist und dessen Multiplikator die Differenz mit dem Minuenden 1 und dem Subtrahenden 2 ist. Der zweite Summand von A ist 1.

1. Analyse von Ausdrücken:

Ist 3 ein Summand von $1 + (2 + 3)$? Ist 3 ein Summand von 6? Ist 1 der Wert der Differenz von 2 (als Minuenden) und 3 (als Subtrahenden)? Ist der Subtrahend des Ausdrucks $(1 - 2) - (5 \cdot (3 + 4))$ eine Differenz, Summe oder Produkt? Was ist der begriffliche Unterschied von Multiplikation und Produkt? Was ist das Produkt aus 3 und 4 als erstem bzw. zweitem Faktor? Was ist der Wert des Produkts aus 3 und 4 als erstem bzw. zweitem Faktor? Ist 3 ein Faktor von 12?

Die natürlichen Sprachen sind selbstverständlich mächtig genug, um damit die Eigenschaften der Operationen $+$, \cdot , $-$ und der Beziehung $<$ präzise beschreiben zu können. Allerdings werden diese Beschreibungen sehr schnell so umfangreich, dass man besser in ausgedehntem Maße abkürzende Schreibweisen verwendet. Wer die deutsche Sprache hinreichend gelernt hat, der kann beispielsweise die folgende Aussage verstehen: „Wenn man irgendwelche 3 ganzen Zahlen, sagen wir a , b und c , nimmt und die Summe $a + (b + c)$ mit a als erstem Summanden und der Summe $b + c$ als zweitem Summanden auswertet, dann erhält man die gleiche Zahl, wie wenn man die Summe $(a + b) + c$ mit der Summe $a + b$ als erstem Summanden und c als zweitem Summanden auswertet.“ Es ist natürlich angebracht, dafür die folgende Kurzschreibweise zu verwenden:

Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Wir stellen nun in abkürzender Schreibweise einige bekannte grundlegenden Eigenschaften natürlicher bzw. ganzer Zahlen zusammen, auf die wir dann in nachfolgenden Anwendungen zurückgreifen können. $a \neq 0$ ist eine Abkürzung dafür, dass $a = 0$ nicht gilt.

Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt

$$\begin{array}{ll} a + 0 = a, & a \cdot 1 = a, & (\text{Neutralität der } 0 \text{ bzw. } 1) \\ 0 < 1, & & (\text{Vergleichbarkeit von } 0 \text{ und } 1) \end{array}$$

- $1 + (-1) = 0$, $0 - a = (-1) \cdot a$, (Subtraktion durch Vorzeichen von 1)
 $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, (Kommutativität von + bzw. ·)
 $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, (Assoziativität von + bzw. ·)
 $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$. (Distributivität von · mit +)
 Wenn $a + b = a + c$, dann gilt $b = c$. (Kürzbarkeit für +)
 Wenn $a \cdot b = a \cdot c$, $a \neq 0$, dann gilt $b = c$. (Kürzbarkeit für ·)
 Wenn $0 < a$, dann gilt $a \neq 0$. (Irreflexivität von <)
 Wenn $a < b$ und $b < c$, dann gilt $a < c$. (Transitivität von <)
 Wenn $a < b$, dann gilt $a + c < b + c$. (Verträglichkeit von < mit +)
 Wenn $a < b$ und $0 < c$, dann gilt $a \cdot c < b \cdot c$. (pos. Verträglichkeit von < mit ·)
 Wenn $a < b$ und $c < 0$, dann gilt $b \cdot c < a \cdot c$. (neg. Verträglichkeit von < mit ·)

2. Wie könnte man zeigen, dass die Assoziativität nicht für die Subtraktion gilt? Welchen logischen Grund könnte es geben, dass wir die Eigenschaften $a \cdot 0 = 0$ und $(-1) \cdot (-1) = 1$ nicht in unsere Liste grundlegender Eigenschaften der ganzen Zahlen aufgenommen haben?

Ganze Zahlen haben scheinbar einen Mangel, der erst mit Einführung der rationalen Zahlen behoben wird. Tatsächlich ist nicht jede ganze Zahl a „innerhalb“ der ganzen Zahlen durch eine ganze Zahl b „teilbar“ in dem Sinne, dass es eine ganze Zahl c gibt, so dass $a = b \cdot c$ gilt. Wenn es allerdings eine solche Zahl c gibt, dann sagen wir, dass b ein *Teiler* von a ist oder a in Faktoren b und c *zerlegbar* ist.

Manche ganzen Zahlen a haben nur die trivialen Teiler $1, -1, a, -a$ ($-a$ ist eine abkürzende Schreibweise für $(-1) \cdot a$). Wenn außerdem $a \neq 1$ und $a \neq -1$ gilt, dann nennt man diese Zahlen *unzerlegbar*. Unzerlegbare ganze Zahlen p sind *prim* in dem folgenden Sinne:

Wenn p ein Teiler von $a \cdot b$ ist, dann ist p auch Teiler von a oder von b .

Die Eigenschaft der *Primheit* ist der eigentliche Grund, warum man unzerlegbare ganze Zahlen auch *Primzahlen* nennt. Die Primheitseigenschaft unzerlegbarer ganzer Zahlen wollen wir zunächst ohne Beweis benutzen. Der Beweis wird in einem späteren Kapitel der Vorlesung im Zusammenhang mit dem Euklidischen Algorithmus nachgeholt werden.

3. Man zeige, dass kein Teiler von 12 größer ist als 12 oder kleiner als -12 ! Wie viele positive Teiler besitzt die Zahl 12? Wie zeigt man, dass 5 unzerlegbar ist? Wie viele positive Primzahlen gibt es, die nicht größer sind als 20?
4. Man zeige: Falls m prim und Teiler von a^2 ist, dann ist auch m^2 Teiler von a^2 .
5. Man zeige: Falls a ein Teiler sowohl von b als auch von $b + 2$ ist, dann ist a ein Teiler von 2.

Lösung

1. 3 ist kein Summand von $1 + (2 + 3)!$ 3 ist kein Summand von $6!$ Der gesuchte Wert der Differenz ist -1 und nicht 1 ! Der Subtrahend des bezeichneten Ausdrucks ist selbst ein Produkt! Die Multiplikation ist eine Operation, während ein Produkt ein Ausdruck für eine Operation ist! Das Produkt ist ein Ausdruck, hier also der Ausdruck $3 \cdot 4!$ Der Wert dieses Produkts ist $12!$ 3 ist kein Faktor von 12 (sondern ein Teiler von 12)!

2. Man gibt ein Beispiel an für a, b, c , so dass die Gleichung der Assoziativität nicht gilt: $2 - (1 - 1) = 2 \neq 0 = (2 - 1) - 1$.

Die Gleichung $a \cdot 0 = 0$ ergibt sich aus den übrigen Eigenschaften mit der folgenden Rechnung: $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0$. Daraus folgt aber $a \cdot 0 = 0$.

Ähnliches gilt für die Vorzeichenmultiplikation: $1 = 1 + 0 \cdot 0 = 1 + (1 + (-1)) \cdot (1 + (-1)) = 1 + 1 + (-1) + (-1) + (-1) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-1)$.

3. Falls $12 < a$, dann gibt es kein $b \leq 0$ mit $a \cdot b = 12$. Aber auch für $1 \leq b$ kann $a \cdot b = 12$ nicht gelten, weil aus $1 \leq b$ sofort $a \leq a \cdot b$ und mithin $12 < a \cdot b$ folgt. Der Fall $a < -12$ lässt sich auf den ersten Fall zurückführen, weil $a \cdot b = (-a) \cdot (-b)$ gilt.

Als positive Teiler von 12 kommen also nur 12 Zahlen in Frage. Man probiert alle Möglichkeiten durch und erhält 1, 2, 3, 4, 6, 12 als Teiler. Es gibt also 6 positive Teiler von 12.

5 ist unzerlegbar, weil 2, 3 und 4 keine Teiler von 5 sind.

Beweis für 2: $2 < 2 \cdot 2 < 5 < 2 \cdot 3 < 2 \cdot 4 < \dots$

8 positive Primzahlen (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19) sind nicht größer als 20.

4. Wenn m prim und Teiler von $a \cdot a$ ist, dann muss m Teiler von a sein, d.h. $m \cdot k = a$. Es folgt $(m \cdot m) \cdot (k \cdot k) = (m \cdot k) \cdot (m \cdot k) = a^2$, mithin ist m^2 Teiler von a^2 .
5. Aus $a \cdot l = b$ und $a \cdot k = b + 2$ folgt $a \cdot (k - l) = a \cdot k - a \cdot l = (b + 2) - b = 2$. Also ist a ein Teiler von 2.

Aufgabe 2 (Rationale Zahlen)

Jede *rationale Zahl* kann bekanntlich durch den Wert eines ganzzahligen Bruchs $\frac{a}{b}$ dargestellt werden, wobei a und b ganze Zahlen bedeuten. Für $b = 0$ ist der Wert des Bruchs nicht definiert. a bzw. b heißen *Zähler* bzw. *Nenner* des Bruchs $\frac{a}{b}$. Ein Bruch ist also ein Ausdruck, wobei Zähler und Nenner selbst wieder Ausdrücke sein dürfen, die ganze Zahlen darstellen. Zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ haben genau dann den gleichen Wert, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt. Besondere Bedeutung haben *Dezimalbrüche*, d. h. diejenigen Brüche, deren Nenner eine sogenannte „Zehnerpotenz“ 10^k ist mit spezieller Komma-Schreibweise (z. B. 3,1415).

Für rationale Zahlen ist Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division ($/$) (ausgenommen durch 0) definiert. Ein Ausdruck der Form s/t heißt *Quotient* mit s als *Dividend* und t als *Divisor*. Die Auswertung eines Quotienten liefert den *Wert des Quotienten*. Die Division von rationalen Zahlen wird häufig durch einen sogenannten „Doppelbruch“ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ dargestellt. Der Größenvergleich von $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ mit positiven ganzen Zahlen b, d ist definiert durch $a \cdot d < c \cdot b$.

1. Wie lautet eine Analyse des folgenden Ausdrucks A im Sinne der Aufgabe 1.1? Welchen Wert besitzt der Quotient A ?

$$A = \frac{6 \cdot (1+2)}{9} / (1 - 4).$$

2. Wie werden Brüche addiert, multipliziert, dividiert?

3. Dezimalbrüche haben den Vorteil der Eindeutigkeit der Darstellung einer positiven oder negativen rationalen Zahl in Komma-Schreibweise (ohne Null an letzter Stelle). Welchen Nachteil haben diese Brüche?

Lösung

- Der Dividend des Quotienten A ist ein Bruch, dessen Zähler ein Produkt ist mit erstem Faktor 6 und einem zweitem Faktor, welcher eine Summe ist bestehend aus 1 als erstem Summanden und 2 als zweitem Summanden, und dessen Nenner 9 ist. Der Divisor von A ist eine Differenz mit 1 als Minuenden und 4 als Subtrahenden. Der Wert des Quotienten ist $-\frac{2}{3}$.
- Addition: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$. Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Division: $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.
- Manche rationalen Zahlen lassen sich nicht als endlichen Dezimalbruch darstellen. Beispiel: $\frac{1}{3}$.

Aufgabe 3 (Reelle Zahlen)

Man kann einen Mangel darin sehen, dass es zur Lösung gewisser Gleichungen nicht genügend viele rationale Zahlen gibt. Beispielsweise gibt es keine rationale Zahl a , so dass $a \cdot a = 2$ gilt. Deshalb konstruiert man den umfassenden Bereich der *reellen Zahlen*.

Alle reellen Zahlen besitzen eine Darstellung als *unendlichen Dezimalbruch* der Form $\pm (g, d_1 d_2 d_3 \dots d_n d_{n+1} \dots)$. Dabei bezeichnet g eine positive ganze Zahl oder die 0, und die Ziffern d_i bezeichnen eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9.

Die Darstellung einer reellen Zahl r als unendlicher Dezimalbruch notiert im Wesentlichen eine Summation. Für jedes natürliche n gilt insbesondere

$$r = g + \frac{d_1 d_2 d_3 \dots d_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot (0, d_{n+1} d_{n+2} \dots).$$

Bedeutsam ist, dass die Zahl 1 die zwei Darstellungen $1,000\dots$ und $0,999\dots$ besitzt.

- Durch welchen unendlichen Dezimalbruch werden die Zahlen $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ dargestellt? Welche Darstellung der 1 erhält man durch die stellenweise Addition dieser beiden unendlichen Dezimalbrüche?
- Wie könnten unendliche Dezimalbrüche „näherungsweise“ addiert werden?

Lösung

- $\frac{1}{3} = 0,33\dots$, $\frac{2}{3} = 0,66\dots$
 $1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0,33\dots + 0,66\dots = 0,99\dots$
- Für die Summe $c = a + b$ positiver reeller Zahlen $a = g_a, a_1 a_2 a_3 \dots a_n a_{n+1} \dots$ und $b = g_b, b_1 b_2 b_3 \dots b_n b_{n+1} \dots$ definieren wir die Näherung \bar{c} durch

$$\bar{c} = g_a + \frac{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}{10^n} + g_b + \frac{b_1 b_2 b_3 \dots b_n}{10^n} = g_c + \frac{c_1 c_2 c_3 \dots c_n}{10^n}.$$

Hier ist $g_c = g_a + g_b + \ddot{u}$ mit $\ddot{u} c_1 c_2 \dots c_n = a_1 a_2 \dots a_n + b_1 b_2 \dots b_n$ in den entsprechenden Dezimaldarstellungen. Offenbar gilt $|\bar{c} - c| \leq \frac{2}{10^n}$.

Aufgabe 4 (Komplexe Zahlen)

Den krönenden Abschluss der Einführung von elementaren Zahlen bilden die *komplexen Zahlen*. Die Theorie der komplexen Zahlen geht über den Schulstoff weit hinaus. Während die reellen Zahlen Längen- bzw. Gewichtsverhältnisse darstellen, werden durch komplexe Zahlen zusätzlich Kreisprozesse beschreibbar. Wir haben bereits das merkwürdige Gesetz der Multiplikation kennengelernt, dass die Potenzen $(-1)^n$ abwechselnd die Zahlen 1 und -1 ergeben. Nun entpuppt sich dieses Gesetz als Spezialfall der Tatsache, dass es für jedes k komplexe Zahlen c, c^2, \dots, c^k mit $c^k = 1$ gibt, die k Punkte eines Kreises von komplexen Zahlen mit Betrag 1 durchlaufen. Für die sogenannte „imaginäre Einheit“¹ $i (= \sqrt{-1})$ gilt beispielsweise, dass i, i^2, i^3, i^4 verschiedene Zahlen sind mit $i^4 = 1$.

Sinn einer universitären Bildung ist insbesondere, über das Erlernen des Gebrauchs von Werkzeugen hinauszugehen und faszinierende Wissensgebiete einzusehen. Die Theorie der komplexen Zahlen und Funktionen ist eines dieser Wissensgebiete.

¹Die sehr reale Intuition der Darstellung von Kreisprozessen durch komplexe Zahlen kommt in der mystifizierend klingenden Bezeichnung „imaginär“ leider nicht zur Geltung.