4.6 Beweistechniken

Die meisten mathematischen Behauptungen sind von der Form

$$A \Rightarrow B \text{ bzw. } (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B\,.$$

Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir zeigen:

1. Unter der Annahme A können wir B zeigen (direkter Beweis).
2. Unter der Annahme $\neg B$ können wir $\neg A$ zeigen (indirekter Beweis).
3. Unter den Annahmen $\neg B$ und A können wir einen Widerspruch zeigen (Widerspruchsbeweis).

Beispiel 23 (Direkter Beweis)

Satz 24

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

$n \in \mathbb{N}_0$ ungerade

$$\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0)\,[n = 2m+1] \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = \underbrace{\underbrace{4m^2 + 4m}_{\text{gerade}} + 1}_{\text{ungerade}} \Rightarrow n^2 \text{ ungerade.} \qquad \square$$

Beispiel 25 (Indirekter Beweis)

Satz 26

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:

Zunächst überzeugen wir uns (siehe Hausaufgabe), dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)[\text{„}n \text{ gerade“} \equiv \text{„}n \text{ nicht ungerade“}]\,.$$

Nachdem wir dieses Lemma bewiesen haben, ist die Aussage des Satzes gleichbedeutend mit

> *„Falls $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.“*

Diese Aussage wurde in Satz 24 bewiesen. □

Beispiel 27 (Beweis durch Widerspruch)

Wir nehmen an, dass die zu zeigende Aussage falsch ist und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Satz 28

$\sqrt{3}$ *ist irrational, d. h.* $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ *.*

Beweis:

Widerspruchsannahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \mathrm{ggT}(p,q) = 1 \quad \textbf{(*)}$$
$$\Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0)\,[p = 3k]$$
$$\Rightarrow 3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|q \Rightarrow 3|\,\mathrm{ggT}(p,q)$$

Das ist ein Widerspruch zu **(*)**. □

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Wir zeigen zunächst den Induktionsanfang, also $P(0)$, und folgern dann aus der Induktionsvoraussetzung, also der Annahme $P(n)$ bzw. den Annahmen $P(0), P(1), \ldots, P(n)$, die Behauptung $P(n+1)$.

Beispiel 29

Satz 30

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 0$ trivial $0 = 0$

Induktionsannahme: $P(n)$, also Satz richtig für n

Induktionsschluss:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i = \sum_{i=0}^{n} i \; + n + 1 \overset{\text{(IV)}}{=} \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1 =$$

$$= \frac{2 \cdot (n+1) + n \cdot (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dies ist $P(n+1)$, die Behauptung für $n+1$. $\square$

Das Schubfachprinzip (*pigeon hole principle*)

Satz 31

Sei $f : X \to Y$, *sei* $\infty > |X| > |Y| \geq 1$, *dann*

$$(\exists y \in Y)\big[|f^{-1}(y)| \geq 2\big]$$

Beweis:

Sei $|X| = n, |Y| = m$, und sei $n > m$. Widerspruchsannahme: Kein $y \in Y$ hat mehr als ein Urbild in X. Die Bilder der ersten m Elemente aus X müssen dann notwendigerweise verschieden sein. Damit hat jedes $y \in Y$ ein Urbild in X. Da f total ist, muss das Bild des $(m+1)$-ten Elements aus X dann als Bild ein Element aus Y haben, das bereits Bild eines anderen $x \in X$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

Beispiele:

– Seien 13 oder mehr Personen in einem Raum. Dann haben mindestens 2 der Personen im gleichen Monat Geburtstag.

– Behauptung: In jeder Menge P von Personen ($|P| \geq 2$) gibt es immer mindestens 2 Personen, die gleich viele (andere) Personen in der Menge kennen („kennen“ symmetrische Relation).

Beweis:

1. Überlegung: Sei $n = |P|$. Wir betrachten die Abbildung $P \ni p \mapsto \#$ Personen, die p kennt $\in \{0, \ldots, n-1\}$
2. Weitere Überlegung:
   1. 1. Fall: 0 kommt als Bild nicht vor (jeder kennt mindestens eine andere Person). $\Rightarrow$ $|$Urbildmenge$| = n$ und $|$Bildmenge$| \leq n - 1$. Das Schubfachprinzip liefert die Behauptung.
   2. 2. Fall: 0 kommt als Bild vor. $\Rightarrow$ Es gibt also (wegen der Symmetrie) mindestens eine Person, die kein anderer kennt. Also ist der Wertebereich der Funktion $\subseteq \{0, 1, \ldots, n-2\}$. Das Schubfachprinzip liefert nunmehr ebenfalls den Beweis.

$\square$

Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Satz 32

Sei $f : X \to Y, \infty > |X| \geq |Y| \geq 1$. *Dann existiert ein* $y \in Y$, *so dass*

$$\left|f^{-1}(y)\right| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil .$$

Beweis:

Es gilt $|X| = \left|\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y)\right| = \sum_{y\in Y} \left|f^{-1}(y)\right|$. Das zweite „=“ gilt, da die $f^{-1}(y)$ alle paarweise disjunkt sind!

Widerspruchsannahme:

$$(\forall y \in Y)\left[\left|f^{-1}(y)\right| \leq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1\right]$$

Da

$$\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \leq \frac{|X| + |Y| - 1}{|Y|} - 1 = \frac{|X| - 1}{|Y|},$$

folgt mit der Widerspruchsannahme

$$|X| = \sum_{y\in Y} \left|f^{-1}(y)\right| \leq |Y| \cdot \frac{|X| - 1}{|Y|} = |X| - 1\,.$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. □

Ein Beispiel aus der Ramsey-Theorie:

Satz 33

In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich gegenseitig kennen, oder 3 Personen, von denen keiner die beiden anderen kennt.

Beweis:

$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_6\}$. Betrachte die Abbildung

$$\{2, \ldots, 6\} \to \{0, 1\}$$
$$\{2, \ldots, 6\} \ni i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i\text{“} \\ 0 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i \text{ nicht“} \end{cases}$$

Aus dem verallgemeinerten Schubfachprinzip folgt: Es gibt mindestens 3 Leute $\in \{p_2, \ldots, p_6\}$, die p_1 kennen, oder es gibt mindestens 3 Leute, die p_1 nicht kennen.

Wir betrachten die erste Alternative, die zweite ist analog. O. B. d. A. kennt p_1 p_2, p_3 und p_4.

1. Fall:

$\big(\exists p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}\big)\big[i \neq j \text{ und } p_i \text{ kennt } p_j\big]$, z. B. $i = 2, j = 4$. Dann erfüllen $\{p_1, p_i, p_j\}$ den ersten Teil der Behauptung.

2. Fall: (Komplement des 1. Falls!)

$\big(\forall p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}\big)\big[i \neq j \Rightarrow p_i \text{ kennt } p_j \text{ nicht}\big]$. Dann erfüllen $\{p_2, p_3, p_4\}$ den zweiten Teil der Behauptung. $\square$

Beispiel 34 (Indirekter Beweis, Wohlordnungseigenschaft)

Satz 35

Sei S eine endliche Menge $\neq \emptyset$, und sei $f : S \to S$ eine Abbildung von S in S. Dann gilt:

$$(\exists r \in \mathbb{N})[f^r(S) = f(f^r(S))]\,.$$

Dabei ist $f^0 : S \to S$ als die Identität auf S und, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, f^{n+1} als $f \circ f^n$ definiert.

Beweis:

Falls f bijektiv ist, dann erfüllt $r = 1$ die Behauptung. Wir nehmen daher an, dass f nicht bijektiv, also nicht surjektiv ist, so dass $f(S) \subsetneqq S$. Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Weitere Annahme: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{m+1}(S) \subsetneqq f^m(S)$.

In diesem Fall hätte die Menge $\{|f^m(S)|;\ m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$ kein *kleinstes Element*, da stets $|f^{m+1}(S)| < |f^m(S)|$.
Widerspruch zur Wohlordnungseigenschaft!

Sei also $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft

$$f^{m+1}(S) = f^m(S) .$$

Dann erfüllt $r = m$ die Behauptung. □

Alternativer, direkter Beweis

Beweis:
Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Die Menge $\{|f^m(S)|;\ m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_0$ ist nicht leer und besitzt deshalb aufgrund der Wohlordnungseigenschaft ein minimales Element $|f^r(S)|$.

Damit gilt $|f^r(S)| \leq |f^{r+1}(S)|$.

Wegen $f^{r+1}(S) \subseteq f^r(S)$ folgt

$$|f^r(S)| = |f^{r+1}(S)|\,,$$

also auch $f^r(S) = f^{r+1}(S)$.

$\square$