
Diskrete Strukturen

Abgabetermin: 22. November 2011, 14 Uhr in die **DS Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $M = \{a, b, c, d\}$ mit $|M| = 4$. Wir betrachten injektive Abbildungen $f : M \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, dass es (mindestens) zwei Fixpunkte $x \in M$ gibt, d. h. Elemente x , für die $f(x) = x$ gilt.

Wieviele Abbildungen $f : M \rightarrow M$ mit mindestens zwei Fixpunkten gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort durch Auflistung aller Abbildungen mit dieser Eigenschaft!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

1. Zeigen Sie mit direktem Beweis für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}.$$

2. Man zeige mit vollständiger Induktion, dass L_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Wir betrachten die aussagenlogische Formel $F = r \vee (\neg q \vee \neg p)$. Geben Sie eine zu F äquivalente Formel G an, die als Operator nur Vorkommen des booleschen Operators \Rightarrow enthält, insbesondere also keine Konstanten (0-stellige Operatoren) `true` oder `false` enthält.

2. Sei G eine aussagenlogische Formel, in der nur die Variablen p, q, r und der Operator \Rightarrow eventuell mehrfach vorkommen. Beispiel: $G_0 = (p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$.

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}_0$ der Vorkommen des Operators \Rightarrow in G , dass die Belegung $\beta : p \mapsto 1, q \mapsto 1, r \mapsto 1$ die Formel G wahr macht.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die folgende Aussage:

Für alle $n \geq 2$ und positiven reellen Zahlen a_1, a_2, \dots, a_n mit $a_i < 1$ gilt

$$(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot \dots \cdot (1 - a_n) < 1 - (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n).$$

Sie dürfen die Produktschreibweise $\prod_{i=1}^n a_i$ bzw. $\prod_{i=1}^n (1 - a_i)$ für $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ bzw. $(1 - a_1) \cdot (1 - a_2) \cdot \dots \cdot (1 - a_n)$ benutzen.

Hinweis: Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Sei $S' = \langle S, \circ \rangle$ eine Halbgruppe. Dann nennen wir ein Element $x \in S$ vertauschbar bezüglich \circ , falls gilt $(\forall a \in S) [a \circ x = x \circ a]$. Es sei $V(S)$ die Menge aller bezüglich \circ vertauschbaren Elemente von S .

1. Zeigen Sie die Abgeschlossenheit von $V(S)$ unter der Verknüpfung \circ , d. h.:

$$x, y \in V(S) \implies x \circ y \in V(S).$$

2. Nun nehmen wir an, dass S' eine Gruppe mit Einselement 1 ist. Zeigen Sie, dass die Unterhalbgruppe $\langle V(S), \circ_{V(S)} \rangle$ von S' dann ebenfalls eine Gruppe ist.
3. Sei S' wieder eine Gruppe mit Einselement 1.
Ist $V(S)$ ein Normalteiler von S' ? Begründung!

Vorbereitung 2

Sei M eine endliche Menge und $z = (a_0, a_1, \dots, a_{|M|-1})$ ein $|M|$ -Tupel mit paarweise verschiedenen $a_i \in M$. Dann ist die Abbildung $\pi_z : M \rightarrow M$ mit $\pi_z(a_i) = a_{(i+1) \bmod |M|}$ ein Zyklus der Länge $|M|$ mit Basis M und Darstellung z . Für jeden Zyklus π bezeichne $M(\pi)$ die Basis von π . Man kann π_z als zyklische Nachfolgerbildung in M auffassen.

1. Wie viele Darstellungen besitzt ein Zyklus der Länge 3?
Welchen Zyklus stellt $z = (4, 1, 3, 2)$ dar und welche Basis hat der Zyklus?
Welche verschiedenen Darstellungen hat π_z^3 ? Ist π_z^4 ein Zyklus?

Zyklen ρ, σ heißen *disjunkt*, falls $M(\rho) \cap M(\sigma) = \emptyset$ gilt, d. h., falls deren Basismengen disjunkt sind. Eine Menge Z von paarweise disjunkten Zyklen heißt *Zyklenpartition*. Dabei bildet die Menge der Basismengen $P_Z = \{M(\pi) ; \pi \in Z\}$ eine Mengenpartition der Vereinigung der Basismengen $M(Z) = \bigcup_{\pi \in Z} M(\pi)$. Wir sagen, dass Z eine Zyklenpartition der Menge $M(Z)$ ist.

2. Welche Basis haben die Zyklen zu $z_1 = (2, 5)$, $z_2 = (1)$, $z_3 = (5, 4, 3, 2, 1)$?
Geben Sie eine extensionale Darstellung der Abbildungen π_{z_i} an!
Warum ist $Z = \{\pi_{z_1}, \pi_{z_2}, \pi_{z_3}\}$ keine Zyklenpartition von $[5]$?

Sei Z eine Zyklenpartition von $[n]$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f_Z : [n] \rightarrow [n]$ gegeben für alle $i \in [n]$ durch

$$f_Z(i) = \pi(i), \quad \text{falls } i \in M(\pi) \text{ und } \pi \in Z.$$

3. Zyklenpartitionen werden häufig durch eine Folge $z_1 z_2 \dots z_k$ von Zyklusdarstellungen z_i definiert, wobei die Reihenfolge der z_i in der Folge keine Rolle spielt.

Sei $Z = (4, 5, 1)(3)(2)$ eine Zyklenpartition.
Beschreiben Sie die Abbildung f_Z extensional!

4. Eine Funktion f sei gegeben durch die folgende Matrixdarstellung.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 9 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\{f^i(2) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(3) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\{f^i(5) \mid i \in \mathbb{N}\}$!

Bestimmen Sie eine *Zyklendarstellung von f* , d. h. eine Zykluspartition Z von $[9]$, so dass $f(i) = f_Z(i)$ für alle $i \in [9]$ gilt!

Tutoraufgabe 1

Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. $-7 \equiv 8 \pmod{3}$.
2. $2^{16} \pmod{3} = 2$, $2^{33} \pmod{3} = 2$, $2^{1600} \pmod{3} = 1$.
3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n^2 \pmod{(n+1)} = 1$.
4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n \pmod{2}) \pmod{7} = (n \pmod{7}) \pmod{2}$.
5. Sei \div die ganzzahlige Division. Dann gilt $(-10) \div 4 = -3$.

Tutoraufgabe 2

Zeigen Sie, dass im Folgenden Algebren $A = \langle S, \circ \rangle$ definiert werden, die bezüglich des binären Operators \circ eine Gruppe bilden.

1. Sei S gleich der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ($= 2^X$) einer beliebigen Menge X und sei \circ gegeben durch

$$A \circ B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

2. Sei $1 < n \in \mathbb{N}$ und $S = Z_n^* = \{p \in \mathbb{Z}_n; \text{ggT}(p, n) = 1\}$. \circ sei gleich der Multiplikation ganzer Zahlen modulo n .

Tutoraufgabe 3

$\langle \mathbb{Z}_n^*, \cdot_n \rangle$ mit $n > 1$ und $Z_n^* = \{p \in \mathbb{Z}_n; \text{ggT}(p, n) = 1\}$ ist, wie oben gezeigt, eine Gruppe.

1. Zeigen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12} \rangle$ nicht zyklisch ist!
2. Welche Untergruppen besitzt $\langle \mathbb{Z}_{12}^*, \cdot_{12} \rangle$? Begründung!

Tutoraufgabe 4

Wir betrachten die folgenden Permutationen p_i der Menge $[6] \subseteq \mathbb{N}$ in Zyklendarstellung und beziehen uns dabei auf die Schreibweisen in Vorbereitungsaufgabe 2.

$$\begin{aligned} p_1 &= (1, 5, 4, 6)(2)(3), & p_2 &= (2, 5, 1)(3)(4)(6), \\ p_3 &= (3, 5, 2)(1)(4)(6), & p_4 &= (4, 5, 3)(1)(2)(6). \end{aligned}$$

1. Geben Sie eine Zyklendarstellung der Permutation p an, die durch Komposition der p_i wie folgt definiert ist:

$$p = p_1 \circ p_2 \circ p_3 \circ p_4.$$

2. Bestimmen Sie die kleinste Potenz $k > 0$, so dass $(p_1 \circ p_4)^k$ gleich der identischen Abbildung id ist ($\forall x(id(x) = x)$).