

Bemerkungen:

- 1 Die Bedeutung von \equiv (und damit $\not\equiv$) ist klar. \equiv wird oft, vor allem in Beweisen, auch als

\Leftrightarrow

geschrieben (im Englischen: iff, if and only if).

- 2 Für zwei boolesche Aussagen A und B ist $A \Rightarrow B$ falsch genau dann wenn $A = t$ und $B = f$.
- 3 $A \Rightarrow B$ ist damit äquivalent zu $\neg A \vee B$.
- 4 $A \Rightarrow B$ ist damit auch äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Wichtige Beobachtung:

Gilt also (oder beweisen wir korrekt) $A \Rightarrow f$ (also: „aus der Bedingung/Annahme A folgt ein Widerspruch“), so ist A falsch!

4.6 Beweistechniken

Die meisten mathematischen Behauptungen sind von der Form

$$A \Rightarrow B \text{ bzw. } (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B.$$

Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir zeigen:

- 1 Unter der Annahme A können wir B zeigen (**direkter Beweis**).
- 2 Unter der Annahme $\neg B$ können wir $\neg A$ zeigen (**indirekter Beweis**).
- 3 Unter den Annahmen $\neg B$ und A können wir einen Widerspruch zeigen (**Widerspruchsbeweis**).

Beispiel 23 (Direkter Beweis)

Satz 24

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

$n \in \mathbb{N}_0$ ungerade

$$\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0) [n = 2m + 1] \Rightarrow n^2 = (2m + 1)^2 = \underbrace{4m^2 + 4m}_{\text{gerade}} + 1 \Rightarrow n^2 \text{ ungerade.} \quad \square$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ungerade}}$

Beispiel 25 (Indirekter Beweis)

Satz 26

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:

Zunächst überzeugen wir uns (siehe Hausaufgabe), dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)[\text{„}n \text{ gerade“} \equiv \text{„}n + 1 \text{ ungerade“}].$$

Nachdem wir dieses Lemma bewiesen haben, ist die Aussage des Satzes gleichbedeutend mit

„Falls $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.“

Diese Aussage wurde in Satz 24 bewiesen. □

Beispiel 27 (Beweis durch Widerspruch)

Wir nehmen an, dass die zu zeigende Aussage falsch ist und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Satz 28

$\sqrt{3}$ ist irrational, d. h. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis:

Widerspruchsannahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{ggT}(p, q) = 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0) [p = 3k]$$

$$\Rightarrow 3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|q \Rightarrow 3|\text{ggT}(p, q)$$

Das ist ein Widerspruch zu (*). □

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Wir zeigen zunächst den **Induktionsanfang**, also $P(0)$, und folgern dann aus der **Induktionsvoraussetzung**, also der Annahme $P(n)$ bzw. den Annahmen $P(0), P(1), \dots, P(n)$, die Behauptung $P(n + 1)$.

Beispiel 29

Satz 30

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 0$ trivial $0 = 0$

Induktionsannahme: $P(n)$, also Satz richtig für n

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + n + 1 \stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{2 \cdot (n + 1) + n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\end{aligned}$$

Dies ist $P(n + 1)$, die Behauptung für $n + 1$. □

Das Schubfachprinzip (*pigeon hole principle*)

Satz 31

Sei $f : X \rightarrow Y$, sei $\infty > |X| > |Y| \geq 1$, dann

$$(\exists y \in Y) [|f^{-1}(y)| \geq 2]$$

Beweis:

Sei $|X| = n$, $|Y| = m$, und sei $n > m$. Widerspruchsannahme: Kein $y \in Y$ hat mehr als ein Urbild in X . Die Bilder der ersten m Elemente aus X müssen dann notwendigerweise verschieden sein. Damit hat jedes $y \in Y$ ein Urbild in X . Da f total ist, muss das Bild des $(m + 1)$ -ten Elements aus X dann als Bild ein Element aus Y haben, das bereits Bild eines anderen $x \in X$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Beispiele:

- Seien 13 oder mehr Personen in einem Raum. Dann haben mindestens 2 der Personen im gleichen Monat Geburtstag.

- Behauptung: In jeder Menge P von Personen ($|P| \geq 2$) gibt es immer mindestens 2 Personen, die gleich viele (andere) Personen in der Menge kennen („kennen“ symmetrische Relation).

Beweis:

- 1 Überlegung: Sei $n = |P|$. Wir betrachten die Abbildung $P \ni p \mapsto \# \text{ Personen, die } p \text{ kennt} \in \{0, \dots, n-1\}$
- 2 Weitere Überlegung:
 - 1 1. Fall: 0 kommt als Bild nicht vor (jeder kennt mindestens eine andere Person).
 $\Rightarrow |\text{Urbildmenge}| = n$ und $|\text{Bildmenge}| \leq n-1$. Das Schubfachprinzip liefert die Behauptung.
 - 2 2. Fall: 0 kommt als Bild vor.
 \Rightarrow Es gibt also (wegen der Symmetrie) mindestens eine Person, die kein anderer kennt. Also ist der Wertebereich der Funktion $\subseteq \{0, 1, \dots, n-2\}$. Das Schubfachprinzip liefert nunmehr ebenfalls den Beweis.



Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Satz 32

Sei $f : X \rightarrow Y$, $\infty > |X| \geq |Y| \geq 1$. Dann existiert ein $y \in Y$, so dass

$$|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil .$$

Beweis:

Es gilt $|X| = \left| \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \right| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)|$. Das zweite „=“ gilt, da die $f^{-1}(y)$ alle paarweise disjunkt sind!

Widerspruchsannahme:

$$(\forall y \in Y) \left[|f^{-1}(y)| \leq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \right]$$

Da

$$\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \leq \frac{|X| + |Y| - 1}{|Y|} - 1 = \frac{|X| - 1}{|Y|},$$

folgt mit der Widerspruchsannahme

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq |Y| \cdot \frac{|X| - 1}{|Y|} = |X| - 1.$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. □

Ein Beispiel aus der Ramsey-Theorie:

Satz 33

In jeder Menge von 6 Personen gibt es 3 Personen, die sich gegenseitig kennen, oder 3 Personen, von denen keiner die beiden anderen kennt.

Beweis:

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} &\{2, \dots, 6\} \rightarrow \{0, 1\} \\ &\{2, \dots, 6\} \ni i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i\text{“} \\ 0 & \text{„}p_1 \text{ kennt } p_i \text{ nicht“} \end{cases} \end{aligned}$$

Aus dem **verallgemeinerten Schubfachprinzip** folgt: Es gibt mindestens 3 Leute $\in \{p_2, \dots, p_6\}$, die p_1 kennen, oder es gibt mindestens 3 Leute, die p_1 nicht kennen.

Wir betrachten die erste Alternative, die zweite ist analog. O. B. d. A. kennt p_1 p_2 , p_3 und p_4 .

1. Fall:

$(\exists p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}) [i \neq j \text{ und } p_i \text{ kennt } p_j]$, z. B. $i = 2, j = 4$. Dann erfüllen $\{p_1, p_i, p_j\}$ den ersten Teil der Behauptung.

2. Fall: (Komplement des 1. Falls!)

$(\forall p_i, p_j \in \{p_2, p_3, p_4\}) [i \neq j \Rightarrow p_i \text{ kennt } p_j \text{ nicht}]$. Dann erfüllen $\{p_2, p_3, p_4\}$ den zweiten Teil der Behauptung. □

Beispiel 34 (Indirekter Beweis, Wohlordnungseigenschaft)

Satz 35

Sei S eine endliche Menge $\neq \emptyset$, und sei $f : S \rightarrow S$ eine Abbildung von S in S . Dann gilt:

$$(\exists r \in \mathbb{N})[f^r(S) = f(f^r(S))].$$

Dabei ist $f^0 : S \rightarrow S$ als die Identität auf S und, für alle $n \in \mathbb{N}_0$, f^{n+1} als $f \circ f^n$ definiert.

Beweis:

Falls f bijektiv ist, dann erfüllt $r = 1$ die Behauptung. Wir nehmen daher an, dass f nicht bijektiv, also nicht surjektiv ist, so dass $f(S) \subsetneq S$. Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Weitere Annahme: Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt $f^{m+1}(S) \subsetneq f^m(S)$.

In diesem Fall hätte die Menge $\{|f^m(S)|; m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$ kein *kleinstes Element*, da stets $|f^{m+1}(S)| < |f^m(S)|$.

Widerspruch zur Wohlordnungseigenschaft!

Sei also $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft

$$f^{m+1}(S) = f^m(S) .$$

Dann erfüllt $r = m$ die Behauptung. □

Alternativer, direkter Beweis

Beweis:

Man beachte, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f^{m+1}(S) \subseteq f^m(S)$!

Die Menge $\{|f^m(S)|; m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}_0$ ist nicht leer und besitzt deshalb aufgrund der Wohlordnungseigenschaft ein minimales Element $|f^r(S)|$.

Damit gilt $|f^r(S)| \leq |f^{r+1}(S)|$.

Wegen $f^{r+1}(S) \subseteq f^r(S)$ folgt

$$|f^r(S)| = |f^{r+1}(S)|,$$

also auch $f^r(S) = f^{r+1}(S)$.



Beispiel 36

Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ und n ungerade. Dann lässt sich n als Differenz zweier Quadratzahlen darstellen.

Beweis:

Falls $n = x^2 - y^2$ mit $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$, dann gilt $n = (x - y)(x + y)$.

Sei nun $s := x + y$ und $t := x - y$. Dann ist

$$s > t > 0$$

$$n = s \cdot t$$

$$x = (s + t)/2$$

$$y = (s - t)/2$$

Also müssen s und t beide gerade oder beide ungerade sein.

Beweis (Forts.):

Da

$$s > t > 0$$

$$n = s \cdot t$$

$$x = (s + t)/2$$

$$y = (s - t)/2$$

kann man für ungerades n stets $s := n$ und $t := 1$ setzen und erhält damit $x = (n + 1)/2$ und $y = (n - 1)/2$, die die Behauptung erfüllen! □

Bemerkungen:

- 1 Falls n eine ungerade Primzahl ist, sind s und t eindeutig bestimmt und es gibt genau eine Lösung für x und y .
- 2 Für allgemeine n kann es mehr als eine Lösung geben, z.B. für $n = 15$

$$s = 5, t = 3 \text{ und } 15 = 16 - 1, \text{ oder}$$
$$s = 15, t = 1 \text{ und } 15 = 64 - 49.$$

- 3 Auch für gerade n kann es Lösungen geben, z.B.

$$8 = 9 - 1$$
$$48 = 7^2 - 1^2$$
$$48 = 8^2 - 4^2$$

4.7 Einige Sprechweisen

- ① Wir sagen
„Eine Bedingung/Eigenschaft A ist **hinreichend** für eine Eigenschaft B “,
falls

$$A \Rightarrow B.$$

- ② Wir sagen
„Eine Bedingung/Eigenschaft A ist **notwendig** für eine Eigenschaft B “,
falls

$$A \Leftarrow B \text{ (bzw. } B \Rightarrow A \text{)}.$$

- ③ Wir sagen
„Eine Bedingung/Eigenschaft A ist **notwendig und hinreichend** für eine
Eigenschaft B “,
falls

$$A \Leftrightarrow B \text{ (bzw. } A \equiv B \text{)}.$$

4.8 Folgen und Grenzwerte

R bezeichne einen Bereich wie z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}_0$, oder \mathbb{Z} .

Definition 37

- ① Sei $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$. Eine **endliche Folge** reeller (bzw. rationaler, natürlicher, ganzer) Zahlen

$$(a_i)_{0 \leq i \leq k}$$

ist eine Abbildung

$$\{0, 1, \dots, k\} \ni i \mapsto a_i \in R.$$

- ② Eine **unendliche Folge**

$$(a_n)_{n \geq 0}$$

ist eine Abbildung

$$\mathbb{N}_0 \ni n \mapsto a_n \in R.$$

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine reelle Folge.

- ① Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert** für $n \rightarrow \infty$ nach a “,
und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

falls gilt:

$$(\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq n_\epsilon)[|a_n - a| < \epsilon].$$

- ② Wir sagen
„Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert** für $n \rightarrow \infty$ gegen $+\infty$ “,
und schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

falls gilt:

$$(\forall M \in \mathbb{N} \exists n_M \in \mathbb{N} \forall n \geq n_M)[a_n > M].$$

Beispiel 38

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $a_n := \frac{1}{n} \sin n$.

Behauptung:

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert (für $n \rightarrow \infty$) gegen 0.

Beweis:

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, $N > \epsilon^{-1}$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} |\sin n| \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$



Bemerkungen:

- 1 Falls es für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

so sagen wir, „die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ divergiert für $n \rightarrow \infty$ “.

- 2 Konvergenz gegen $-\infty$ wird entsprechend definiert.
- 3 Für Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ wird das Konvergenzverhalten (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$) analog definiert (indem man die Folge $(f(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ betrachtet!).