

Bemerkungen zur Notation

Wir haben gerade die Symbole

- \forall “für alle” und
- \exists “es gibt”

gebraucht. Dies sind so genannte **logische Quantoren**, und zwar der All- und der Existenzquantor.

Die Formel

$$\{a \in A; (\exists b \in B)[(a, b) \in R]\}$$

ist daher zu lesen als

Die Menge aller Elemente a aus der Menge A , für die es jeweils ein b aus der Menge B gibt, so dass das Paar (a, b) in der Menge/Relation R enthalten ist.

Definition 11

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation. Dann ist

- 1 $R^0 := \{(a, a); a \in A\}$ ($=: \text{Id}_A$)
- 2 $R^{n+1} := R^n \circ R$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beispiel 12

Sei Kind die Relation

$$\{(k, v); k \text{ ist Kind von } v\}$$

Dann bezeichnet Kind^2 die Enkel-Relation.

Definition 13

Sei $R \subseteq A \times A$ eine binäre Relation.

- 1 Dann ist der reflexive (symmetrische, transitive) Abschluss (auch als reflexive, symmetrische bzw. transitive Hülle bezeichnet) die kleinste (im mengentheoretischen Sinn) Relation, die R enthält und reflexiv (symmetrisch, transitiv) ist.
- 2 Die transitive Hülle von R wird oft mit R^+ bezeichnet.
- 3 Die reflexive transitive Hülle von R wird gewöhnlich mit R^* bezeichnet.

Beispiel 14

Die transitive Hülle der Relation „die Mutter von k ist m “ ist die Menge der Tupel (k', m') , so dass gilt:

k' hat seine Mitochondrien von m' geerbt.

4.3 Funktionen

Sei $f : A \rightarrow B$ eine *Funktion* von A nach B (also eine Relation mit genau einem Paar $(f(a), a) \quad \forall a \in A$).

(Eine solche Relation heißt auch **rechtstotal** und **linkseindeutig**.)

- Das *Urbild* von $b \in B$: $f^{-1}(b) = \{a \in A; f(a) = b\}$.
- Schreibweisen: $(A' \subseteq A, B' \subseteq B)$
 - $f(A') = \bigcup_{a \in A'} \{f(a)\}$
 - $f^{-1}(B') = \bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$
- Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ Funktionen, so ist ihre Komposition $g \circ f$ gemäß der entsprechenden Definition für das Relationenprodukt definiert.

Bemerkungen:

Man beachte, dass wir für eine Funktion $f : A \rightarrow B$ die zugehörige Relation \hat{f} als die Menge

$$\{(f(a), a) ; a \in A\}$$

definiert haben, also die Abbildung sozusagen von rechts nach links lesen.

Der Grund dafür ist, dass es in der Mathematik üblich ist, die **Komposition** (Hintereinanderausführung) einer Funktion g **nach** einer Funktion f (also $g \circ f$) so zu lesen:

g nach f .

Dies liegt daran, dass man für die Anwendung einer Funktion f auf ein Argument x

$$f(x)$$

und für die Anwendung von g nach f auf x dementsprechend

$$g(f(x)) = g \circ f(x)$$

schreibt.

Bemerkung:

Für die zugehörigen Relationen gilt daher:

$$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f}.$$

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

- f injektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| \leq 1 \right]$
- f surjektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| \geq 1 \right]$
- f bijektiv: $(\forall b \in B) \left[|f^{-1}(b)| = 1 \right]$, d.h. injektiv und surjektiv
- Ist $f : A \rightarrow B$ eine Bijektion, dann ist auch f^{-1} eine bijektive Funktion.

Eigenschaften von $f : A \rightarrow B$:

Existiert eine Bijektion von A nach B , haben A und B *gleiche Kardinalität*.

Warnung: Es gibt A, B mit $A \subsetneq B$, aber $|A| = |B|$!

Beispiel 15 ($|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}_0|$)

$$f : \mathbb{Z} \ni z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z - 1 & z < 0 \end{cases} \in \mathbb{N}_0$$

Sei R eine Relation über A , \tilde{R} eine Relation über B .

- Eine Funktion $f : A \rightarrow B$ heißt **Homomorphismus** von R nach \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \Rightarrow (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

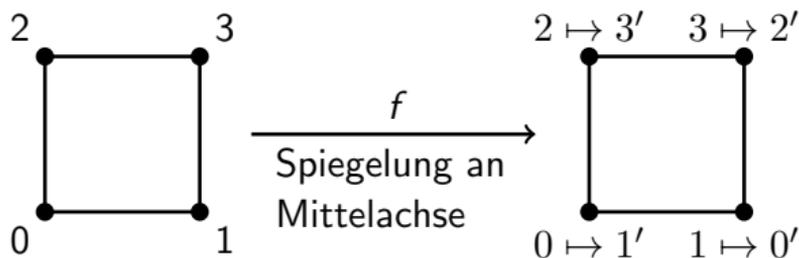
- Eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** zwischen R und \tilde{R} , falls gilt:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R \iff (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in \tilde{R}$$

Beispiel 16

Relation: Die Kantenmenge $E = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ des Graphen mit der Knotenmenge $\{0, 1, 2, 3\}$

Funktion: Spiegelung der Knotenmenge wie gezeichnet an der Mittelachse



$$E' = \{\{0', 1'\}, \{1', 3'\}, \{0', 2'\}, \{2', 3'\}\}$$

f ist ein Isomorphismus bzgl. (der Relation) E .

Schreibweisen für wichtige Funktionen:

- $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{y \in \mathbb{Z}; y \leq x\} \in \mathbb{Z}$
(„untere Gaußklammer“, „*floor*“, „*entier*“)
- $\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$
 $\mathbb{R} \ni x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{y \in \mathbb{Z}; y \geq x\} \in \mathbb{Z}$
(„obere Gaußklammer“, „*ceiling*“)

Beispiel 17

$$\lfloor \pi \rfloor = 3, \lfloor -\pi \rfloor = -4, \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

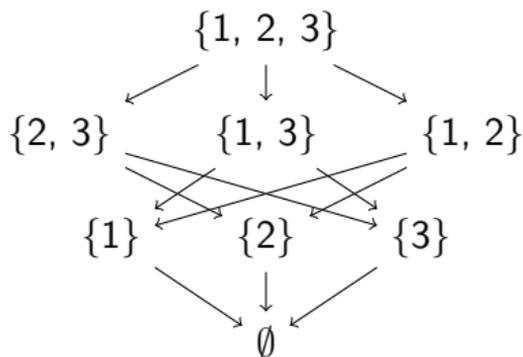
4.4 Partielle Ordnungen

Sei (S, \preceq) eine partielle Ordnung.

Beispiel 18

$S = P(A)$, $\preceq \equiv \subseteq$, $A = \{1, 2, 3\}$

Hassediagramm:



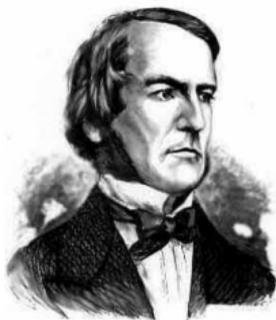
Eigenschaften partieller Ordnungen:

- $a, b \in S$ heißen **vergleichbar** (bzgl. \preceq), falls $a \preceq b$ oder $b \preceq a$, sonst **unvergleichbar**.
- Ein Element $a \in S$ heißt **minimal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge b \preceq a]$.
- Ein Element $a \in S$ heißt **maximal**, falls $(\nexists b \in S)[b \neq a \wedge a \preceq b]$.
- Eine partielle Ordnung heißt **linear** oder **vollständig**, falls sie keine unvergleichbaren Elemente enthält (z. B. (\mathbb{N}_0, \leq)).

4.5 Boolesche Ausdrücke und Funktionen, Logiken

Oft ordnen wir Aussagen über irgendwelche Gegebenheiten die Werte *true* oder *false* zu. Daneben verwenden wir auch Verknüpfungen solcher Aussagen mittels Operatoren wie z.B. „und“, „oder“, oder der Negation.

Der [Boolesche Aussagenkalkül](#) stellt für dieses Vorgehen einen formalen Rahmen dar.



George Boole

lived from 1815 to 1864

Boole approached logic in a new way reducing it to a simple algebra, incorporating logic into mathematics. He also worked on differential equations, the calculus of finite differences and general methods in probability.

[more on George Boole](#)

Logik

- Logik ist die Wissenschaft des (begrifflichen) Schließens. Sie untersucht, welche Inferenzen korrekt sind.
- Unter Inferenz verstehen wir (informell) eine Aussage der Form:
wenn A gilt/wahr ist, dann auch B.
- Alternative Sprechweisen:
 - „Wenn A, dann B“
 - „Aus A folgt B“, „B ist eine Folge von A“
 - „A impliziert B“, „ $A \Rightarrow B$ “
 - „Wenn B nicht gilt, dann kann auch A nicht gelten“
- Dabei heißt A jeweils die Annahme (Prämisse, Antezedens, Hypothese) und B die Konklusion (Folgerung, Conclusio, Konsequenz).

Bemerkung:

- Unter einer **Implikation** versteht man gewöhnlich einen Ausdruck/eine Behauptung der Form

aus A folgt B bzw. $A \Rightarrow B$.

- Unter einer **Inferenz** versteht man den Vorgang, (im Rahmen einer Logik) für A und B (wie oben) von der Aussage/Behauptung A zu der Aussage/Behauptung B zu kommen.

Achtung!

Wenn (irgendwie) eine Implikation

aus A folgt B

gilt/wahr ist, so heißt das von sich aus noch **nicht**, dass

- A gilt/wahr ist, oder
- B gilt/wahr ist.

Es sagt nur, dass, **wenn** A gilt, **dann** auch B .

Aussagenlogik (Propositional Logic)

- Aussagen werden aus einer vorgegebenen Menge von **atomaren** Aussagen (Platzhaltern für Aussagen) mit Hilfe der **Operatoren** (**Konnektoren**, **Junktoren**) „und“, „oder“, „nicht“ und „wenn, . . . dann“ (**u.a.**) gebildet.
- Atomare (aussagenlogische) Aussagen sind **entweder wahr oder falsch**.
- Die Grundlagen der Aussagenlogik wurden von George Boole („The Laws of Thought“, 1854) entwickelt (s.o.). Man spricht deshalb auch von der **Booleschen Logik**.

Formalisten der Aussagenlogik

- Die Aussagenlogik (wie jede Logik) bildet eine **formale Sprache**.
- Eine formale Sprache wird durch ihre **Syntax** und ihre **Semantik** definiert.
- Die Syntax der Sprache legt durch Regeln fest, welche Zeichenketten **wohlgeformte Ausdrücke** sind.
Die wohlgeformten Ausdrücke einer Logik heißen Formeln.
- Die Semantik legt die **Bedeutung** der Ausdrücke fest.
Eine formale Semantik ordnet jedem (wohlgeformten) Ausdruck ein mathematisches Objekt zu, welches die Bedeutung des Ausdrucks darstellt.

- Eine formale Syntax besteht aus einem **Vokabular** und einer Menge von Formationsregeln/Bildungsgesetzen.
- Das Vokabular legt fest, welche Zeichen in Ausdrücken vorkommen dürfen
- Die Bildungsgesetze legen fest, welche Zeichenketten über dem Vokabular zulässig oder **wohlgeformt** sind (und welche nicht).

Syntax für die Aussagenlogik (ohne Quantoren)

- ① **true** und **false** sind Formeln (alternativ: 1/0, wahr/falsch, ...);
- ② eine Aussagenvariable (wie x oder p) ist eine Formel;
- ③ sind F und G Formeln, dann ist auch
 - $\neg F$ (alternative Darstellung: \overline{F})
 - $(F \wedge G)$
 - $(F \vee G)$
 - $(F \Rightarrow G)$
 - (F)eine Formel;
- ④ Ein Ausdruck ist nur dann eine Formel, wenn er durch endlichmalige Anwendung der obenstehenden Regeln konstruiert werden kann.

Beispiele für aussagenlogische Formeln

- Beispiele für aussagenlogische Formeln sind:

① $(p \wedge q) \Rightarrow r$

② $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

③ $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

④ $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q)$

- Keine Formeln sind dagegen:

① $\vee(p \Rightarrow q)$

② $p \wedge q \vee r$

Semantik der Aussagenlogik

- Eine **Belegung** („eine Welt“) ist eine Funktion von einer Menge von Aussagenvariablen in die Menge $\{0, 1\}$ der Wahrheitswerte.
- Die Belegung $p \mapsto 0, q \mapsto 1$ ist eine Belegung für die Formel $p \Rightarrow q$.
- Unter der Belegung $p \mapsto 1, q \mapsto 0$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 0 (oder **false**).
- Unter der Belegung $p \mapsto 0, q \mapsto 1$ ist der Wert der Formel $p \Rightarrow q$ gleich 1 (oder **true**).
- Die **Semantik** einer booleschen Formel ist ihr Wert unter allen möglichen Belegungen (der darin vorkommenden Variablen).

Wahrheitstabellen

Damit ergibt sich

- Die Formel $\neg p$ ergibt genau dann **wahr** wenn p mit 0/**false** belegt wird.
- Die Formel $p \Rightarrow q$ ist genau dann **false**, wenn p gleich 1/**true** und q gleich 0/**false** ist.
- Wir sagen, dass eine Belegung eine Formel **erfüllt**, falls unter der Belegung der resultierende Wahrheitswert der Formel gleich 1/**true** ist.