
Grundlagen: Algorithmen und Datenstrukturen

Abgabetermin: In der jeweiligen Tutorübung

Hausaufgabe 1

Betrachten Sie den Algorithmus 1 zur Bestimmung eines minimalen Elements in einem Integer-Array.

Algorithmus 1: Min

```
Input : int  $A[]$ , int  $n$ 
1 int  $i = 1$ 
2 int  $min = A[0]$ 
3 while  $i < n$  do
4   | if  $A[i] < min$  then
5   |   |  $min = A[i]$ 
6   |    $i = i + 1$ 
7 return  $min$ 
```

Bestimmen Sie die exakte Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus, indem Sie die exakte Anzahl der Rechenoperationen, wie sie in der Vorlesung definiert wurden (Vergleiche, Zuweisungen, Additionen, ...), in Abhängigkeit der Eingabegröße berechnen (keine asymptotische Abschätzungen durch Landau-Symbole).

Berechnen Sie nun auch die Worst-Case Laufzeit mit Hilfe der Landau-Symbole.

Hausaufgabe 2

In welcher Relation bezüglich der Landau-Symbole stehen die Funktionen $\text{ld } n = \log_2 n$ und $\ln n = \log_e n$? Beweisen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 1

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$:

1. $\sum_{i=0}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$,
2. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$,
3. $19 | (5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$ (In Worten: 19 teilt $(5 \cdot 2^{3n+1} + 3^{3n+2})$),

wobei F_n die n -te Fibonaccizahl nach der rekursiven Definition $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ mit den Anfangswerten $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ ist.

Aufgabe 2

Ordnen Sie die Funktionen $\sqrt{\text{ld}(n+1)}$, n^2 , $(\text{ld } n)^{\text{ld } n}$, 2^n , n , 10^{100} , \sqrt{n} , $n^{\text{ld } n}$, $\text{ld } \sqrt{n+1}$, $n \log n$ nach Ihrem Wachstum.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die in der Vorlesung angegebene Regel:

Für alle Funktionen $f(n), g(n)$ mit $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : f(n), g(n) > 0$ gilt:

$$\mathcal{O}(f(n) + g(n)) = \mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n))$$

wobei $\mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) := \{h_f(n) + h_g(n) \mid h_f(n) \in \mathcal{O}(f(n)) \wedge h_g(n) \in \mathcal{O}(g(n))\}$ (Hier ist also die Gleichheit der beiden Mengen zu zeigen).