

SS 2011

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik  
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/>

Sommersemester 2011

# Kapitel 0 Organisatorisches

- Vorlesungen:
  - Di 14:00–15:30 (PH HS1), Do 14:15–15:45 (PH HS1)  
Abweichende Termine: 19.5, 9.6, 30.6, 14.7.: ZÜ statt VL (PH HS1)  
Pflichtvorlesung Grundstudium(Diplom, Bachelor IN, Bioinformatik)  
Modulnr.: IN0018
- Übung:
  - 2SWS Tutorübung: siehe Webseite zur Übung
  - 2SWS (freiwillige) Zentralübung: Fr 16:00–17:30 (MI HS1) (aber: siehe oben)
  - Übungsleitung: Dr. W. Meixner
- Umfang:
  - 3V+2TÜ+2ZÜ, 6 ECTS-Punkte
- Sprechstunde:
  - nach Vereinbarung

- Vorkenntnisse:
  - Einführung in die Informatik I/II
  - Diskrete Strukturen
- Weiterführende Vorlesungen:
  - Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
  - Randomisierte Algorithmen
  - Komplexitätstheorie
  - Internetalgorithmik
  - ...
- Webseite:

<http://www.mayr.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/>

- Übungsleitung:
  - Dr. Werner Meixner, MI 03.09.040 ([meixner@in.tum.de](mailto:meixner@in.tum.de))  
Sprechstunde: Dienstag, 11:30Uhr und nach Vereinbarung
- Sekretariat:
  - Frau Lissner, MI 03.09.052 ([lissner@in.tum.de](mailto:lissner@in.tum.de))

- Übungsaufgaben und Klausur:
  - Ausgabe jeweils am Dienstag auf der Webseite der Vorlesung, ab 12:00Uhr
  - Abgabe eine Woche später bis 12:00Uhr, Briefkasten im Keller
  - Vorbereitung in der Tutorübung
- Klausur:
  - Zwischenklausur (50% Gewicht) 24. Juni 2011, 16:15–17:45Uhr, MW 1801, MW 2001  
Anmeldung über TUMonline (erforderlich!): 16. Mai – 5. Juni 2011
  - Endklausur (50% Gewicht) am **6. August 2011, 11:30–13:30Uhr**, MW 0001
  - Wiederholungsklausur am **10. Oktober 2011, 11:30–14:00Uhr**
  - bei den Klausuren sind *keine* Hilfsmittel außer einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt zugelassen
  - Für das Bestehen des Moduls müssen **40%** der erreichbaren Hausaufgabenpunkte erzielt werden; die Note ergibt sich aus den Leistungen in der zweigeteilten Klausur.
  - vorauss. 11 Übungsblätter, das letzte am 18. Juli 2011, jedes 20 Punkte

# 1. Vorlesungsinhalt

- Endliche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Wahrscheinlichkeitsraum, Ereignis, Zufallsvariable
  - spezielle Verteilungen
  - Ungleichungen von Markov und Chebyshev
- Unendliche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Normalverteilung, Exponentialverteilung
  - Zentraler Grenzwertsatz
- Stochastische Prozesse
  - Markovketten
  - Warteschlangen
- Statistik
  - Schätzvariablen
  - Konfidenzintervalle
  - Testen von Hypothesen

## 2. Literatur

-  T. Schickinger, A. Steger:  
*Diskrete Strukturen - Band 2*,  
Springer Verlag, 2001
-  M. Greiner, G. Tinhofer:  
*Stochastik für Informatiker*,  
Carl Hanser Verlag, 1996
-  H. Gordon:  
*Discrete Probability*,  
Springer-Verlag, 1997
-  R. Motwani, P. Raghavan:  
*Randomized Algorithms*,  
Cambridge University Press, 1995

-  M. Hofri:  
*Probabilistic Analysis of Algorithms*,  
Springer Verlag, 1987
-  L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz:  
*Statistik - Der Weg zur Datenanalyse*,  
Springer-Verlag, 1997

### 3. Einleitung

Was bedeutet Zufall?

- Große Menge von „gleichen“ Ereignissen, wobei sich bestimmte Eigenschaften/Messgrößen jeweils ändern können
- Unkenntnis über den Ausgang eines durchgeführten Experiments
- Ein komplexes Experiment wird **theoretisch** vielfach mit eventuell sich änderndem Ergebnis ausgeführt
- physikalischer Zufall (Rauschen, Kernzerfall)

## Zufall in der *diskreten* Informatik

- Die Eingabe für einen bestimmten Algorithmus wird aus einer großen Menge möglicher Eingaben **zufällig** gewählt:

**average case**

- Die Laufzeit einzelner Schritte eines Algorithmus hängt in „unbekannter“ Weise von der Eingabe ab:

**amortisierte Kostenanalyse**

- Der Algorithmus verwendet Zufallsbits, um mit großer Wahrscheinlichkeit gewisse **Problemsituationen** zu vermeiden:

**Randomisierung**

# Kapitel I Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

## 1. Grundlagen

### Definition 1

- 1 Ein **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum** ist durch eine **Ergebnismenge**  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  von **Elementarereignissen** gegeben.
- 2 Jedem Elementarereignis  $\omega_i$  ist eine **(Elementar-)Wahrscheinlichkeit**  $\Pr[\omega_i]$  zugeordnet, wobei wir fordern, dass  $0 \leq \Pr[\omega_i] \leq 1$  und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

- 3 Eine Menge  $E \subseteq \Omega$  heißt **Ereignis**. Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[E]$  eines Ereignisses ist durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$$

definiert.

## Beispiel 2

Zwei faire Würfel (einer weiß, einer schwarz) werden geworfen. Wir sind an der Gesamtzahl der angezeigten Augen interessiert:

$$\Omega = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

- 1 Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr((i, j))$  eines jeden Elementarereignisses  $(i, j)$  ist  $\frac{1}{36}$ .
- 2 Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr(E)$  des Ereignisses

$$E = \{\text{Die Gesamtzahl der Augen ist } 10\}$$

ist  $\frac{1}{12}$ .

Wir hätten aber auch sagen können:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 10, 11, 12\}$$

Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse ist dann aber nicht mehr ganz elementar. Es ist z.B.

- ①  $\Pr(2) = \frac{1}{36}$ ;
- ②  $\Pr(4) = \frac{1}{12}$ ;
- ③  $\Pr(7) = \frac{1}{6}$ .

### Beispiel 3

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis die gleiche Seite zweimal hintereinander fällt. Dann ist

$$\Omega = \{hh, tt, htt, thh, thtt, hthh, httht, ththh, \dots\}$$

**Frage:** Was sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse?

$\bar{E}$  heißt **komplementäres Ereignis** zu  $E$ .

Allgemein verwenden wir bei der Definition von Ereignissen alle bekannten Operatoren aus der Mengenlehre. Wenn also  $A$  und  $B$  Ereignisse sind, dann sind auch  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  etc. Ereignisse.

Zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **disjunkt** oder auch **unvereinbar**, wenn  $A \cap B = \emptyset$  gilt.

## Definition 4

$$\begin{aligned} \text{relative H\u00e4ufigkeit von } E &:= \frac{\text{absolute H\u00e4ufigkeit von } E}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}} \\ &= \frac{\text{Anzahl Eintreten von } E}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}}. \end{aligned}$$

## Definition 5

Ein Wahrscheinlichkeitsraum mit  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  heißt **endlicher Wahrscheinlichkeitsraum**.

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen werden wir gewöhnlich nur den Fall  $\Omega = \mathbb{N}_0$  betrachten. Dies stellt keine große Einschränkung dar, da wir statt einer Ergebnismenge  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$  auch  $\mathbb{N}_0$  als Ergebnismenge verwenden können, indem wir  $\omega_i$  mit  $i - 1$  identifizieren. Wir sagen, dass durch die Angabe der Elementarwahrscheinlichkeiten ein **Wahrscheinlichkeitsraum auf  $\Omega$**  definiert ist.

## Beispiel 6

Wir beobachten die an einer Straße vorbeifahrenden Autos. Dabei gelte:

- 1 Es fahren doppelt so viele Autos von links nach rechts wie von rechts nach links.
- 2 Von zehn Autos sind acht silbergrau und zwei beige.

- Das Ereignis “*Wir beobachten ein von links nach rechts fahrendes Auto*” hat die Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$ .
- Das Ereignis “*Das nächste Auto ist ein Taxi von rechts*” passiert mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot$$

## Beispiel 7 (Unendlicher Wahrscheinlichkeitsraum)

Wir betrachten eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit  $p$  Kopf zeigt und mit Wahrscheinlichkeit  $q := 1 - p$  Zahl.

Wir führen Versuche aus, indem wir die Münze wiederholt solange werfen, bis *Zahl* fällt. Das *Ergebnis* eines solchen Versuchs ist die Anzahl der durchgeführten Münzwürfe. Damit ergibt sich hier als Ergebnismenge

$$\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

## Beispiel 7 (Forts.)

Sei, für  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\omega_i$  das Elementarereignis

$\omega_i \hat{=} \text{Die Münze wird } i\text{-mal geworfen.}$

Dann gilt:

$$\Pr[\omega_i] = p^{i-1}q,$$

und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1}q = q \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{q}{1-p} = 1.$$

(wie es sein soll!)

## Lemma 8

Für Ereignisse  $A, B, A_1, A_2, \dots$  gilt:

- 1  $\Pr[\emptyset] = 0, \Pr[\Omega] = 1.$
- 2  $0 \leq \Pr[A] \leq 1.$
- 3  $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A].$
- 4 Wenn  $A \subseteq B$ , so folgt  $\Pr[A] \leq \Pr[B].$

## Lemma 8 (Forts.)

- 5 (Additionssatz) Wenn die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare  $i \neq j$  gilt, dass  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ), so folgt

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse  $A, B$  erhalten wir insbesondere

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B].$$

Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen  $A_1, A_2, \dots$  gilt analog

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

## Beweis:

Die Aussagen folgen unmittelbar aus Definition 1, den Eigenschaften der Addition und der Definition der Summe. □

Eigenschaft 5 in Lemma 8 gilt nur für disjunkte Ereignisse. Für den allgemeinen Fall erhalten wir folgenden

### Satz 9 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \dots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]. \end{aligned}$$

## Satz 9 (Forts.)

*Insbesondere gilt für zwei Ereignisse  $A$  und  $B$*

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] .$$

*Für drei Ereignisse  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  erhalten wir*

$$\begin{aligned} \Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] \\ &\quad - \Pr[A_1 \cap A_2] - \Pr[A_1 \cap A_3] \\ &\quad - \Pr[A_2 \cap A_3] \\ &\quad + \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3] . \end{aligned}$$

## Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall  $n = 2$ . Dazu setzen wir  $C := A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ . Gemäß dieser Definition gilt, dass  $C$  und  $A \cap B$  sowie  $C$  und  $B$  disjunkt sind. Deshalb können wir Eigenschaft 5 von Lemma 8 anwenden:

$$\Pr[A] = \Pr[C \cup (A \cap B)] = \Pr[C] + \Pr[A \cap B].$$

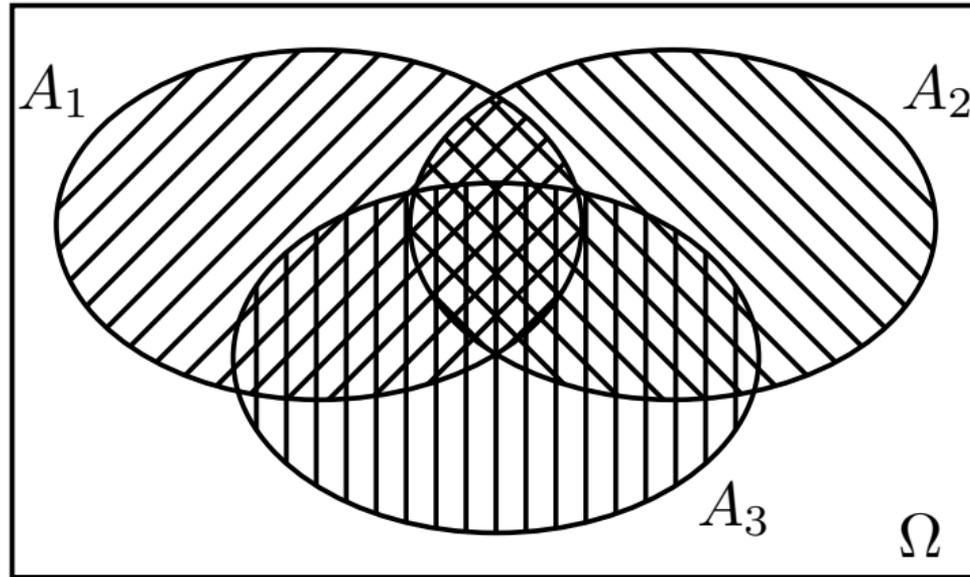
Wegen  $A \cup B = C \cup B$  folgt daraus

$$\begin{aligned}\Pr[A \cup B] &= \Pr[C \cup B] = \Pr[C] + \Pr[B] = \\ &\Pr[A] - \Pr[A \cap B] + \Pr[B]\end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung für  $n = 2$  gezeigt.

## Beweis (Forts.):

Der Fall  $n = 3$ :



Man beachte, dass durch die im Satz angegebene Summe jedes Flächenstück insgesamt genau einmal gezählt wird.

Beweis (Forts.):

Der allgemeine Fall kann nun durch Induktion über  $n$  gezeigt werden (was wir aber hier nicht ausführen!).

Satz 9 findet man manchmal auch unter der Bezeichnung *Satz von Poincaré-Sylvester*, nach dem Franzosen

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

und dem Engländer

James Joseph Sylvester (1814–1897)

benannt.

## Boolesche Ungleichung:

Die folgende Abschätzung ist nach **George Boole** (1815–1864) benannt:

### Korollar 10

Für Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  gilt

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] .$$

Analog gilt für eine unendliche Folge von Ereignissen  $A_1, A_2, \dots$ , dass

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i] .$$

## Beweis:

Zunächst betrachten wir die linke Seite der Ungleichung für den endlichen Fall und erhalten

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i} \Pr[\omega] .$$

Für die rechte Seite gilt

$$\sum_{i=1}^n \Pr[A_i] = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega \in A_i} \Pr[\omega] .$$

Jedes Elementarereignis kommt links also genau einmal und rechts mindestens einmal vor. □

## 1.1 Wahl der Wahrscheinlichkeiten

**Frage:** Wie können Wahrscheinlichkeiten sinnvoll festgelegt werden?

**Prinzip von Laplace (Pierre Simon Laplace (1749–1827)):** *Wenn nichts dagegen spricht, gehen wir davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind.*

Also:

$$\Pr[E] = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

## 1.2 Historische Anfänge der Wahrscheinlichkeitstheorie

Die ersten Hinweise auf mathematische Untersuchungen zu Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie finden sich in einem Briefwechsel zwischen den französischen Mathematikern

Pierre Fermat (1601–1665)

und

Blaise Pascal (1623–1662).

Pascal beschäftigte sich neben der Mathematik auch mit Fragestellungen aus dem Bereich der Physik und auch aus der Informatik! Sein Vater hatte als Steuerinspektor in Rouen umfangreiche Rechnungen durchzuführen und so wurde Pascal zum Bau einer mechanischen Rechenmaschine, der so genannten *Pascaline*, motiviert.

In dem Briefwechsel taucht bereits der Ansatz  $\Pr[E] = |E|/|\Omega|$  zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit von  $E$  auf. Auch den Begriff des Erwartungswerts kann man dort schon finden. Weder Fermat noch Pascal publizierten ihre Überlegungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Niederländer

**Christiaan Huygens** (1629–1695)

entwickelte ebenfalls Methoden zum Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten aus. Er publizierte im Jahre 1657 auch eine kleine Arbeit mit dem Titel „De ratiociniis in ludo aleae“ (Über die Gesetzmäßigkeiten beim Würfelspiel).

## 2. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

### Beispiel 11

A und B spielen Poker (52 Karten, 5 Karten pro Spieler, keine getauschten Karten). A hält vier Asse und eine Herz Zwei in der Hand. B kann dieses Blatt nur überbieten, wenn er einen Straight Flush (fünf Karten *einer* Farbe in aufsteigender Reihenfolge hat). Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis  $F :=$  „B hat einen Straight Flush“ beträgt

$$\Pr[F] = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 8 + 7}{\binom{52-5}{5}} = \frac{31}{1533939} = 2,02\ldots \cdot 10^{-5}.$$

## Beispiel 11 (Forts.)

A hat die Karten allerdings gezinkt und weiß, dass B nur Kreuz in der Hand hält. Bezeichne nun  $\Omega'$  den Wahrscheinlichkeitsraum aller Möglichkeiten für B und  $F'$  das Ereignis, dass  $B$  einen Straight Flush der Farbe Kreuz hat:

$$\Pr[F'] = \frac{|F'|}{|\Omega'|} = \frac{8}{\binom{12}{5}} = \frac{8}{792} \approx 0,01 !!$$

Für  $\Pr[A|B]$  erforderliche Eigenschaften:

- 1  $\Pr[B|B] = 1$ ;
- 2  $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$ ;
- 3 für festes  $B$  ist  $\Pr[A|B]$  proportional zu  $\Pr[A \cap B]$ .

## Definition 12

$A$  und  $B$  seien Ereignisse mit  $\Pr[B] > 0$ . Die **bedingte Wahrscheinlichkeit**  $\Pr[A|B]$  von  $A$  gegeben  $B$  ist definiert als

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} .$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten  $\Pr[\cdot|B]$  bilden für ein beliebiges Ereignis  $B \subseteq \Omega$  mit  $\Pr[B] > 0$  einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum über  $\Omega$ .

Es ist leicht nachzurechnen, dass dadurch die Definition eines *diskreten Wahrscheinlichkeitsraums* erfüllt ist:

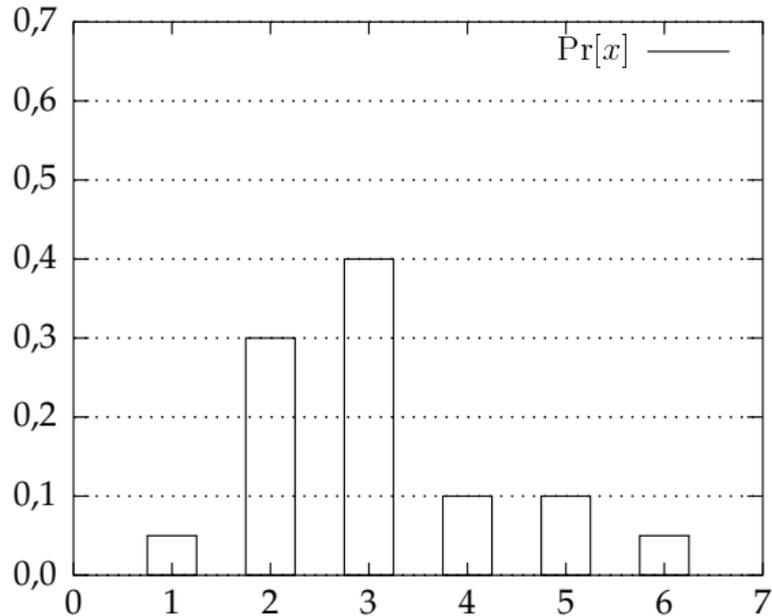
$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega|B] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\Pr[\omega \cap B]}{\Pr[B]} = \sum_{\omega \in B} \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = 1.$$

Damit gelten alle Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten auch für bedingte Wahrscheinlichkeiten. Beispielsweise:

$$\Pr[\emptyset|B] = 0 \text{ sowie } \Pr[\bar{A}|B] = 1 - \Pr[A|B].$$

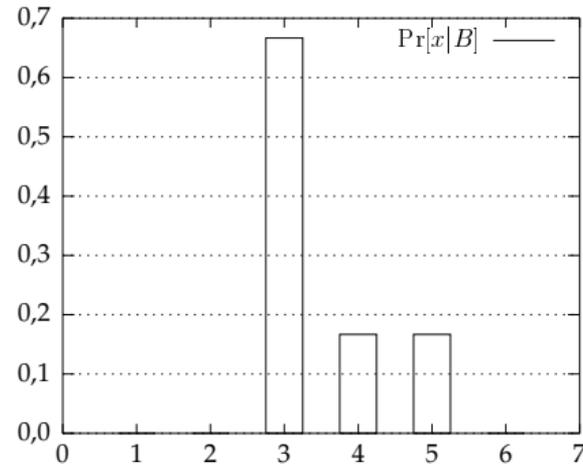
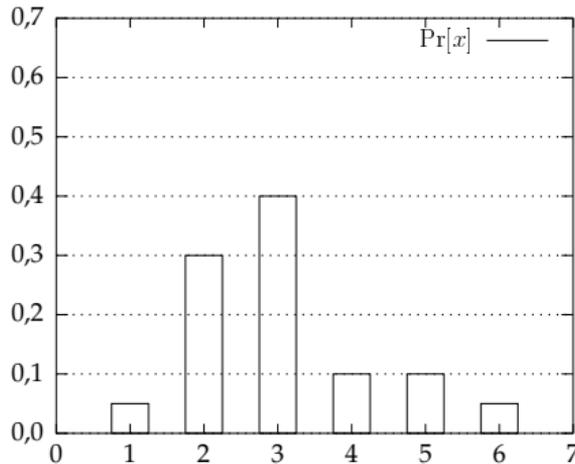
## Beispiel 13 (Reskalierung bei bedingten Wahrscheinlichkeiten)

Betrachte folgenden **gezinkten** Würfel:



## Beispiel 13 (Forts.)

Wir betrachten nun den durch  $B := \{3, 4, 5\}$  gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeitsraum:



## Was genau war die Bedingung?

### Beispiel 14 (Zweikinderproblem)

Wir nehmen an, dass bei der Geburt eines Kindes beide Geschlechter gleich wahrscheinlich sind. Wir wissen, dass eine bestimmte Familie zwei Kinder hat und eines davon ein Mädchen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind?

Natürlich  $\frac{1}{2}$ .

Wirklich?

## Beispiel 14 (Forts.)

Eigentlich gilt:

$$\Omega := \{mm, mj, jm, jj\}$$

und

$$M := \{mm, mj, jm\}.$$

Wir bedingen auf  $M$ , und damit gilt für  $A := \{mm\}$ :

$$\Pr[A|M] = \frac{\Pr[A \cap M]}{\Pr[M]} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

## Beispiel 15 (Ziegenproblem)

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten **“Ich gebe Ihnen mal einen kleinen Hinweis”** öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine Ziege schaut heraus und meckert. Er fragt: **“Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen sie Nummer zwei? ”**

**Frage:** Welche Strategie ist günstiger:

- S1** Der Spieler bleibt immer bei seiner ursprünglichen Wahl.
- S2** Der Spieler wechselt stets die ausgewählte Tür.

## Beispiel (Forts.)

Wir betrachten hier eine Diskussion des Ziegenproblems mit Hilfe von bedingten Wahrscheinlichkeiten. Wir betrachten bei jeder Variante den Fall, dass der Spieler

- a) die "richtige",
- b) eine falsche Tür gewählt hat.

Ersteres geschieht mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$ , Letzteres mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{3}$ .

Wenn wir nun auf den Fall a) bzw. b) bedingen, ergeben sich für die beiden Strategien die folgenden bedingten Gewinnwahrscheinlichkeiten:

	S1	S2
a)	1	0
b)	0	1

Häufig verwendet man die Definition der **bedingten Wahrscheinlichkeit** in der Form

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]. \quad (1)$$

Damit:

### Satz 16 (Multiplikationssatz)

Seien die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  gegeben. Falls  $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \\ \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \dots \\ \dots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]. \end{aligned}$$

## Beweis:

Zunächst halten wir fest, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, da  $\Pr[A_1] \geq \Pr[A_1 \cap A_2] \geq \dots \geq \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ .

Die rechte Seite der Aussage im Satz können wir umschreiben zu

$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \dots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]}$$

Offensichtlich kürzen sich alle Terme bis auf  $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$ . □

## Beispiel 17 (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer  $m$ -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

### Umformulierung:

Man werfe  $m$  Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in  $n$  Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Für das Geburtstagsproblem:  $n = 365$

Offensichtlich muss  $m \leq n$  sein, damit überhaupt jeder Ball allein in einem Korb liegen kann.

Wir nehmen an, dass die Bälle nacheinander geworfen werden.  $A_i$  bezeichne das Ereignis „Ball  $i$  landet in einem noch leeren Korb“. Das gesuchte Ereignis „Alle Bälle liegen allein in einem Korb“ bezeichnen wir mit  $A$ . Nach Satz 16 können wir  $\Pr[A]$  berechnen durch

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr[\cap_{i=1}^m A_i] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_m | \cap_{i=1}^{m-1} A_i].\end{aligned}$$

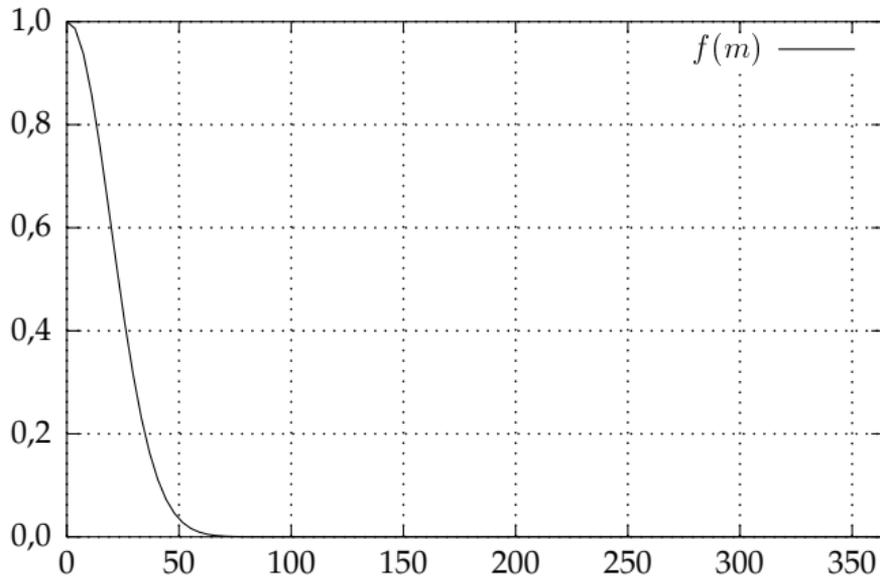
Unter der Bedingung, dass die ersten  $j - 1$  Bälle jeweils in einem leeren Korb gelandet sind, bedeutet  $A_j$ , dass der  $j$ -te Ball in eine der  $n - (j - 1)$  leeren Körbe fallen muss, die aus Symmetriegründen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Daraus folgt

$$\Pr[A_j | \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n - (j - 1)}{n} = 1 - \frac{j - 1}{n}.$$

Mit der Abschätzung  $1 - x \leq e^{-x}$  und wegen  $\Pr[A_1] = 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pr[A] &= \prod_{j=1}^m \left( 1 - \frac{j-1}{n} \right) \\ &\leq \prod_{j=2}^m e^{-(j-1)/n} = e^{-(1/n) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} j} \\ &= e^{-m(m-1)/(2n)} =: f(m). \end{aligned}$$



Verlauf von  $f(m)$  für  $n = 365$

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1 zeigen wir:

### Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweise disjunkt und es gelte  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ .  
Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  mit  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

## Beweis:

Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n) .$$

Da für beliebige  $i, j$  mit  $i \neq j$  gilt, dass  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , sind auch die Ereignisse  $B \cap A_i$  und  $B \cap A_j$  disjunkt. Wegen (1) folgt  $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$  (auch für den Fall, dass  $\Pr[A_i] = 0!$ ). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 5) an

$$\begin{aligned} \Pr[B] &= \Pr[B \cap A_1] + \dots + \Pr[B \cap A_n] = \\ &\Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \dots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n] \end{aligned}$$

und haben damit die Behauptung gezeigt. Da der Additionssatz auch für unendlich viele Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  gilt, kann dieser Beweis direkt auf den unendlichen Fall übertragen werden. □

Mit Hilfe von Satz 18 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

### Satz 19 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  seien paarweis disjunkt, mit  $\Pr[A_j] > 0$  für alle  $j$ . Ferner sei  $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$  ein Ereignis mit  $\Pr[B] > 0$ . Dann gilt für ein beliebiges  $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  mit  $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von  $B$  unter den Bedingungen  $A_i$  (sowie die Wahrscheinlichkeiten der  $A_i$  selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von  $A_i$  bedingt auf das Ereignis  $B$ .

**Thomas Bayes** (1702–1761) war ein bekannter Theologe und Mitglied der Royal Society. Als sein bedeutendstes Werk gilt sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. Diese Arbeit wurde erst 1763 publiziert.

### 3. Unabhängigkeit

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit  $\Pr[A|B]$  kann der Fall auftreten, dass die Bedingung auf  $B$ , also das Vorwissen, dass  $B$  eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von  $A$  erwarten. Es gilt also  $\Pr[A|B] = \Pr[A]$ , und wir nennen dann die Ereignisse  $A$  und  $B$  **unabhängig**.

## Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln)

$$\Omega := \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} .$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{36}$ .

Wir definieren die Ereignisse

$A :=$  Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$  Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$  Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Es gilt  $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$  und  $\Pr[C] = \frac{1}{6}$ . Wie groß ist  $\Pr[B|A]$ ?

## Beispiel 20 (Forts.)

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von  $A$  keine Information in Bezug auf das Ereignis  $B$  hinzu:

$$B \cap A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}.$$

Daraus folgt

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B].$$

Das Eintreffen des Ereignisses  $B$  hat mit dem Ereignis  $A$  „nichts zu tun“.

## Definition 21

Die Ereignisse  $A$  und  $B$  heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Falls  $\Pr[B] \neq 0$ , so können wir diese Definition zu

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$$

umschreiben.

## Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln, Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$  Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$  Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$  Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Bei den Ereignissen  $A$  und  $B$  ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit  $A$  und  $C$ ?

$$A \cap C = \{(2, 5), (4, 3), (6, 1)\}$$

und damit

$$\Pr[A \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \text{ bzw. } \Pr[C|A] = \Pr[C] .$$

## Beispiel 20 (Forts.)

Also sind auch  $A$  und  $C$  (und analog  $B$  und  $C$ ) unabhängig.

**Bemerkung:** Im Beispiel ist  $A \cap C \neq \emptyset$ .

Es gilt sogar allgemein für zwei unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$  mit  $\Pr[A], \Pr[B] > 0$ , dass sie gar nicht disjunkt sein können, da ansonsten

$$0 = \Pr[\emptyset] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

## Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln (Forts.))

Zur Erinnerung:

$A :=$  Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$  Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$  Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Wir betrachten das Ereignis  $A \cap B \cap C$ . Wenn  $A \cap B$  eintritt, so sind beide gewürfelten Augenzahlen gerade und somit ergibt auch die Summe davon eine gerade Zahl. Daraus folgt  $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$  bzw.  $\Pr[C|A \cap B] = 0 \neq \Pr[C]$ . Das Ereignis  $A \cap B$  liefert uns also Information über das Ereignis  $C$ .

## Definition 22

Die paarweise verschiedenen Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen  $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  mit  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (2)$$

Eine unendliche Familie von paarweise verschiedenen Ereignissen  $A_i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  heißt unabhängig, wenn (2) für jede endliche Teilmenge  $I \subseteq \mathbb{N}$  erfüllt ist.

### Lemma 23

Die (paarweise verschiedenen) Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  sind genau dann unabhängig, wenn für alle  $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$  gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \quad (3)$$

wobei  $A_i^0 = \bar{A}_i$  und  $A_i^1 = A_i$ .

## Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass aus (2) die Bedingung (3) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in  $s_1, \dots, s_n$ . Wenn  $s_1 = \dots = s_n = 1$  gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung  $s_1 = 0$ . Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}].\end{aligned}$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}],\end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen  $1 - \Pr[A_1] = \Pr[\bar{A}_1]$  folgt.

## Beweis (Forts.):

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (3)  $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$  folgt. Es gilt wegen des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3=0,1} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \sum_{s_n=0,1} \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2],\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □

Aus der Darstellung in Lemma 23 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse  $A$  und  $B$  auch die Ereignisse  $\bar{A}$  und  $B$  (und analog auch  $A$  und  $\bar{B}$  bzw.  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$ ) unabhängig sind!

Ebenso folgt:

## Lemma 24

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  unabhängige Ereignisse. Dann sind auch  $A \cap B$  und  $C$  bzw.  $A \cup B$  und  $C$  unabhängig.

### Beweis:

Zur Unabhängigkeit von  $A \cap B$  und  $C$  siehe das vorangehende Beispiel.

Aus

$$\begin{aligned}\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\ &= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\ &= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]\end{aligned}$$

folgt die Unabhängigkeit von  $A \cup B$  und  $C$ . □

## 4. Zufallsvariablen

### 4.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an „Auswirkungen“ oder „Merkmale“ der (Elementar)Ereignisse interessiert.

#### Definition 25

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge  $\Omega$  gegeben. Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable  $X$  über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge  $\Omega$  heißt **diskret**.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der Wertebereich

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. abzählbar unendlich).

## Beispiel 26

Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir  $\Omega := \{H, T\}^3$ . Die Zufallsvariable  $Y$  bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispielsweise gilt also  $Y(HTH) = 2$  und  $Y(HHH) = 3$ .  $Y$  hat den Wertebereich  $W_Y = \{0, 1, 2, 3\}$ .

Für  $W_X = \{x_1, \dots, x_n\}$  bzw.  $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$  betrachten wir (für ein beliebiges  $1 \leq i \leq n$  bzw.  $x_i \in \mathbb{N}$ ) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

**Bemerkung:** Anstelle von  $\Pr[X^{-1}(x_i)]$  verwendet man häufig auch die Schreibweise  $\Pr[„X = x_i“]$ . Analog setzt man

$$\begin{aligned} \Pr[„X \leq x_i“] &= \sum_{x \in W_X : x \leq x_i} \Pr[„X = x“] \\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_i\}]. \end{aligned}$$

Oft lässt man auch die Anführungszeichen weg.

## Definition 27

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1] \quad (4)$$

nennt man **(diskrete) Dichte(funktion)** der Zufallsvariablen  $X$ .

- Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x' \in W_X : x' \leq x} \Pr[X = x'] \in [0, 1] \quad (5)$$

heißt **Verteilung(sfunktion)** der Zufallsvariablen  $X$ .

## Beispiel 28

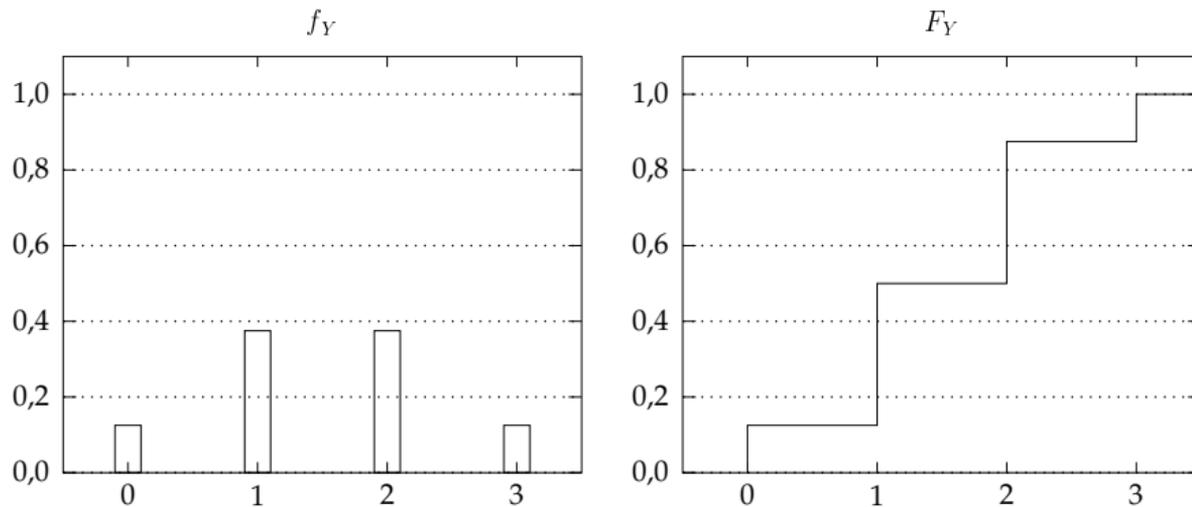
Für die Zufallsvariable  $Y$  erhalten wir

$$\Pr[Y = 0] = \Pr[TTT] = \frac{1}{8},$$

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[H TT] + \Pr[T HT] + \Pr[T T H] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 2] = \Pr[H H T] + \Pr[H T H] + \Pr[T H H] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 3] = \Pr[H H H] = \frac{1}{8}.$$



Dichte und Verteilung von  $Y$

**Bemerkung:** Man kann statt  $\Omega$  auch den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum über  $W_X$  betrachten.

## 4.2 Erwartungswert und Varianz

### Definition 29

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  definieren wir den **Erwartungswert**  $\mathbb{E}[X]$  durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern  $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$  konvergiert.

### Beispiel 30

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

## Beispiel 31

Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Head“ zeigt. Sei  $k$  die Anzahl der durchgeführten Würfe. Wenn  $k$  ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank  $k$  Euro. Andernfalls ( $k$  gerade) zahlt die Bank  $k$  Euro an den Spieler.

$$G := \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wie schon gesehen, gilt dann

$$\Pr[\text{„Anzahl Würfe} = k\text{“}] = (1/2)^k .$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

existiert der Erwartungswert  $\mathbb{E}[G]$ .

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ (2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \cdot [(2j-1) - j] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von  $k$  Euro jeweils auf  $2^k$  Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

dann existiert  $\mathbb{E}[G']$  nicht, da

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G'] &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = +1 - 1 + 1 - 1 + - \dots \end{aligned}$$

## Berechnung des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \\ &= \sum_{x \in W_X} x \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega) = x} \Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] .\end{aligned}$$

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen ist dabei analog zur Definition des Erwartungswerts erforderlich, dass  $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \Pr[\omega]$  konvergiert (**absolute** Konvergenz).

## Satz 32 (Monotonie des Erwartungswerts)

Seien  $X$  und  $Y$  Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum  $\Omega$  mit  $X(\omega) \leq Y(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Dann gilt  $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ .

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \Pr[\omega] = \mathbb{E}[Y].$$



Aus Satz 32 folgt insbesondere, dass  $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$  gilt, wenn für die Zufallsvariable  $X$  die Eigenschaft  $a \leq X(\omega) \leq b$  für alle  $\omega \in \Omega$  erfüllt ist.

### 4.2.1 Rechenregeln für den Erwartungswert

Oft betrachtet man eine Zufallsvariable  $X$  nicht direkt, sondern wendet noch eine Funktion darauf an:

$$Y := f(X) = f \circ X,$$

wobei  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion sei mit  $W_X \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ .

**Beobachtung:**  $f(X)$  ist wieder eine Zufallsvariable.

Aus

$$\Pr[Y = y] = \Pr[\{\omega \mid f(X(\omega)) = y\}] = \sum_{x: f(x)=y} \Pr[X = x]$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \mathbb{E}[Y] = \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{y \in W_Y} y \cdot \sum_{x: f(x)=y} \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} f(x) \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \cdot \Pr[\omega]. \end{aligned}$$

## Satz 33 (Linearität des Erwartungswerts, einfache Version)

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[a \cdot X + b] &= \sum_{x \in W_X} (a \cdot x + b) \cdot \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] + b \cdot \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \\ &= a \cdot \mathbb{E}[X] + b.\end{aligned}$$

□

## Satz 34

Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^i \Pr[X = i] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \Pr[X = i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j]. \end{aligned}$$

□

## Definition 35

Sei  $X$  eine Zufallsvariable und  $A$  ein Ereignis mit  $\Pr[A] > 0$ . Die **bedingte Zufallsvariable**  $X|A$  besitzt die Dichte

$$f_{X|A}(x) := \Pr[X = x | A] = \frac{\Pr[„X = x“ \cap A]}{\Pr[A]}.$$

Die Definition von  $f_{X|A}$  ist zulässig, da

$$\sum_{x \in W_X} f_{X|A}(x) = \sum_{x \in W_X} \frac{\Pr[„X = x“ \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\Pr[A]}{\Pr[A]} = 1.$$

Der Erwartungswert  $\mathbb{E}[X|A]$  der Zufallsvariablen  $X|A$  berechnet sich entsprechend:

$$\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_{X|A}(x).$$

## Satz 36

Sei  $X$  eine Zufallsvariable. Für paarweise disjunkte Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  mit  $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$  und  $\Pr[A_1], \dots, \Pr[A_n] > 0$  gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i].$$

Für paarweise disjunkte Ereignisse  $A_1, A_2, \dots$  mit  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$  und  $\Pr[A_1], \Pr[A_2], \dots > 0$  gilt analog

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i],$$

sofern die Erwartungswerte auf der rechten Seite alle existieren und die Summe  $\sum_{i=1}^{\infty} |\mathbb{E}[X|A_i]| \cdot \Pr[A_i]$  konvergiert.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot \sum_{i=1}^n \Pr[X = x|A_i] \cdot \Pr[A_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x|A_i] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] \cdot \mathbb{E}[X|A_i].\end{aligned}$$

Der Beweis für den unendlichen Fall verläuft analog. □

## Beispiel 37

Wir werfen eine Münze so lange, bis zum ersten Mal „Kopf“ erscheint. Dies geschehe in jedem Wurf unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $p$ . Wir definieren dazu die Zufallsvariable  $X :=$  „Anzahl der Würfe“. Wir haben bereits gesehen, dass

$$\Pr[X = k] = p(1 - p)^{k-1}$$

und damit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(1 - p)^{k-1} = p \cdot \frac{1}{(1 - (1 - p))^2} = \frac{1}{p}.$$

## Beispiel 37

**Andere Berechnungsmethode:** (gestützt auf Satz 36)

Definiere das Ereignis

$$K_1 := \text{„Im ersten Wurf fällt Kopf“ .}$$

Offensichtlich gilt  $\mathbb{E}[X|K_1] = 1$ .

Nehmen wir nun an, dass im ersten Wurf *nicht* „Kopf“ gefallen ist. Wir starten das Experiment neu.

## Beispiel 37

Sei  $X'$  die Anzahl der Würfe bis zum ersten Auftreten von „Kopf“ im neu gestarteten Experiment. Wegen der Gleichheit der Experimente gilt  $\mathbb{E}[X'] = \mathbb{E}[X]$ . Damit schließen wir

$$\mathbb{E}[X|\bar{K}_1] = 1 + \mathbb{E}[X'] = 1 + \mathbb{E}[X]$$

und erhalten mit Satz 18:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|K_1] \cdot \Pr[K_1] + \mathbb{E}[X|\bar{K}_1] \cdot \Pr[\bar{K}_1] \\ &= 1 \cdot p + (1 + \mathbb{E}[X]) \cdot (1 - p).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum  $\mathbb{E}[X] = 1/p$ .

## 4.2.2 Varianz

Wir betrachten die beiden folgenden Zufallsexperimente:

- ① Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei **gerader** Augenzahl erhalten wir 1 Euro, bei **ungerader** Augenzahl müssen wir 1 Euro bezahlen.
- ② Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5 Euro, ansonsten müssen wir 1 Euro bezahlen.

### **Beobachtung:**

In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn = 0.

Dennoch sind die „Schwankungen“ im ersten Fall geringer als im zweiten.

Eine nahe liegende Lösung wäre,

$$\mathbb{E}[|X - \mu|]$$

zu berechnen, wobei  $\mu = \mathbb{E}[X]$  sei. Dies scheitert jedoch meist an der „unhandlichen“ Betragsfunktion. Aus diesem Grund betrachtet man stattdessen  $\mathbb{E}[(X - \mu)^2]$ , also die quadratische Abweichung vom Erwartungswert.

### Definition 38

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $\mu = \mathbb{E}[X]$  definieren wir die *Varianz*  $\text{Var}[X]$  durch

$$\text{Var}[X] := \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot \Pr[X = x].$$

Die Größe  $\sigma := \sqrt{\text{Var}[X]}$  heißt *Standardabweichung* von  $X$ .

## Satz 39

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  gilt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Beweis:

Sei  $\mu := \mathbb{E}[X]$ . Nach Definition gilt

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \mathbb{E}[X] + \mu^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

□

## Beispiel 40

- ① Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei **gerader** Augenzahl erhalten wir 1 Euro, bei **ungerader** Augenzahl müssen wir 1 Euro bezahlen. Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1.$$

- ② Wir würfeln (mit einem fairen Würfel), bei 6 Augen erhalten wir 5 Euro, ansonsten müssen wir 1 Euro bezahlen.

Es ist

$$\mu = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{6} \cdot 5^2 + \frac{5}{6} \cdot (-1)^2 = 5.$$

## Satz 41

Für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X].$$

## Beweis:

Aus der in Satz 33 gezeigten Linearität des Erwartungswerts folgt  $\mathbb{E}[X + b] = \mathbb{E}[X] + b$ . Zusammen mit der Definition der Varianz ergibt sich damit sofort

$$\text{Var}[X + b] = \mathbb{E}[(X + b - \mathbb{E}[X + b])^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \text{Var}[X].$$

Weiter folgt mit Satz 39:

$$\text{Var}[a \cdot X] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2 = a^2\mathbb{E}[X^2] - (a\mathbb{E}[X])^2 = a^2 \cdot \text{Var}[X],$$

und daraus zusammen die Behauptung. □

Der Erwartungswert und die Varianz gehören zu den so genannten **Momenten** einer Zufallsvariablen:

### Definition 42

Für eine Zufallsvariable  $X$  nennen wir  $\mathbb{E}[X^k]$  das  **$k$ -te Moment** und  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$  das  **$k$ -te zentrale Moment**.

Der Erwartungswert ist also identisch zum ersten Moment, während die Varianz dem zweiten zentralen Moment entspricht.

## 4.3 Mehrere Zufallsvariablen

### Beispiel 43

Aus einem Skatblatt mit 32 Karten ziehen wir zufällig eine Hand von zehn Karten sowie einen Skat von zwei Karten. Unter den Karten gibt es vier Buben. Die Zufallsvariable  $X$  zählt die Anzahl der Buben in der Hand, während  $Y$  die Anzahl der Buben im Skat angibt. Die Werte von  $X$  und  $Y$  hängen offensichtlich stark voneinander ab. Beispielsweise muss  $Y = 0$  sein, wenn  $X = 4$  gilt.

Wie kann man mit mehreren Zufallsvariablen über demselben Wahrscheinlichkeitsraum rechnen, auch wenn sie, wie im obigen Beispiel, sehr voneinander abhängig sind? Wir untersuchen Wahrscheinlichkeiten der Art

$$\Pr[X = x, Y = y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) = x, Y(\omega) = y\}].$$

## Beispiel 44

Wenn wir nur die Zufallsvariable  $X$  betrachten, so gilt für  $0 \leq x \leq 4$

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x}}{\binom{32}{10}}.$$

Allgemein nennt man Zufallsvariablen mit der Dichte

$$\Pr[X = x] = \frac{\binom{b}{x} \binom{a}{r-x}}{\binom{a+b}{r}}$$

**hypergeometrisch verteilt.** Durch diese Dichte wird ein Experiment modelliert, bei dem  $r$  Elemente ohne Zurücklegen aus einer Grundmenge der Mächtigkeit  $a + b$  mit  $b$  besonders ausgezeichneten Elementen gezogen werden.

## Beispiel 44 (Forts.)

Die Zufallsvariable  $Y$  ist für sich gesehen ebenfalls hypergeometrisch verteilt mit  $b = 4$ ,  $a = 28$  und  $r = 2$ .

Für  $X$  und  $Y$  zusammen gilt jedoch z.B.

$$\Pr[X = 4, Y = 1] = 0,$$

und allgemein

$$\Pr[X = x, Y = y] = \frac{\binom{4}{x} \binom{28}{10-x} \binom{4-x}{y} \binom{28-(10-x)}{2-y}}{\binom{32}{10} \binom{22}{2}}.$$

**Bemerkung:** Die Schreibweise  $\Pr[X = x, Y = y]$  stellt eine Abkürzung von  $\Pr[„X = x \wedge Y = y“]$  dar. Ein anderes Beispiel ist

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y_1, \sqrt{Y} = y_2].$$

Die Funktion

$$f_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

heißt **gemeinsame Dichte** der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

Aus der gemeinsamen Dichte  $f_{X,Y}$  kann man ableiten

$$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \quad \text{bzw.} \quad f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y).$$

Die Funktionen  $f_X$  und  $f_Y$  nennt man **Randdichten**.

Die Ereignisse „ $Y = y$ “ bilden eine Partitionierung des Wahrscheinlichkeitsraumes, und es gilt daher

$$\Pr[X = x] = \sum_{y \in W_Y} \Pr[X = x, Y = y] = f_X(x).$$

Die Dichten der einzelnen Zufallsvariablen entsprechen also genau den Randdichten.

Für zwei Zufallsvariablen definiert man die **gemeinsame Verteilung**

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[\{\omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}] \\ &= \sum_{x' \leq x} \sum_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y'). \end{aligned}$$

Die **Randverteilung** ergibt sich gemäß

$$F_X(x) = \sum_{x' \leq x} f_X(x') = \sum_{x' \leq x} \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x', y)$$

sowie

$$F_Y(y) = \sum_{y' \leq y} f_Y(y') = \sum_{y' \leq y} \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y').$$

### 4.3.1 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

#### Definition 45

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  heißen unabhängig, wenn für alle  $(x_1, \dots, x_n) \in W_{X_1} \times \dots \times W_{X_n}$  gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n].$$

Alternativ:

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n).$$

Bei unabhängigen Zufallsvariablen ist also die gemeinsame Dichte gleich dem Produkt der Randdichten. Ebenso gilt

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n).$$

## Satz 46

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen und  $S_1, \dots, S_n$  beliebige Mengen mit  $S_i \subseteq W_{X_i}$ . Dann sind die Ereignisse „ $X_1 \in S_1$ “,  $\dots$ , „ $X_n \in S_n$ “ unabhängig.

Beweis:

$$\begin{aligned} & \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &= \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = x_n] \\ &= \left( \sum_{x_1 \in S_1} \Pr[X_1 = x_1] \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{x_n \in S_n} \Pr[X_n = x_n] \right) \\ &= \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n]. \end{aligned}$$

□

## Satz 47

$f_1, \dots, f_n$  seien reellwertige Funktionen ( $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $i = 1, \dots, n$ ). Wenn die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig sind, dann gilt dies auch für  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ .

### Beweis:

Sei  $z_i \in W_{f(X_i)}$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $S_i = \{x; f(x) = z_i\}$ .

$$\begin{aligned} & \Pr[f_1(X_1) = z_1, \dots, f_n(X_n) = z_n] \\ &= \Pr[X_1 \in S_1, \dots, X_n \in S_n] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \Pr[X_1 \in S_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n \in S_n] \\ &= \Pr[f_1(X_1) = z_1] \cdot \dots \cdot \Pr[f_n(X_n) = z_n]. \end{aligned}$$



## 4.3.2 Zusammengesetzte Zufallsvariablen

### Beispiel 48

Ein Würfel werde zweimal geworfen.  $X$  bzw.  $Y$  bezeichne die Augenzahl im ersten bzw. zweiten Wurf. Sei  $Z := X + Y$  die Summe der gewürfelten Augenzahlen.

Für  $Z$  gilt z.B.:

$$\Pr[Z = 1] = \Pr[\emptyset] = 0, \Pr[Z = 4] = \Pr[\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}] = \frac{3}{36}.$$

Für die Verteilung der Summe zweier unabhängiger Zufallsvariablen gilt der folgende Satz:

### Satz 49

*Für zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  sei  $Z := X + Y$ . Es gilt*

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).$$

## Beweis:

Mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt, dass

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \Pr[Z = z] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X + Y = z \mid X = x] \cdot \Pr[X = x] \\&= \sum_{x \in W_X} \Pr[Y = z - x] \cdot \Pr[X = x] \\&= \sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x).\end{aligned}$$



Den Ausdruck  $\sum_{x \in W_X} f_X(x) \cdot f_Y(z - x)$  aus Satz 49 nennt man in Analogie zu den entsprechenden Begriffen bei Potenzreihen auch **Faltung** oder **Konvolution** der Dichten  $f_X$  und  $f_Y$ .

## Beispiel (Forts.)

Berechne die Dichte von  $Z = X + Y$ :

$$\begin{aligned}\Pr[Z = z] &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x] \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \cdot \Pr[Y = z - x] = \sum_{x=\max\{1, z-6\}}^{\min\{6, z-1\}} \frac{1}{36}.\end{aligned}$$

Für  $2 \leq z \leq 7$  erhalten wir

$$\Pr[Z = z] = \sum_{i=1}^{z-1} \frac{1}{36} = \frac{z-1}{36}.$$

Und für  $7 < z \leq 12$ :

$$\Pr[Z = z] = \frac{13-z}{36}.$$

### 4.3.3 Momente zusammengesetzter Zufallsvariablen

#### Satz 50 (Linearität des Erwartungswerts)

Für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$  mit  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathbb{E}[X] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} (a_1 \cdot X_1(\omega) + \dots + a_n \cdot X_n(\omega)) \cdot \Pr[\omega] \\ &= a_1 \cdot \left( \sum_{\omega \in \Omega} X_1(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) + \dots + a_n \cdot \left( \sum_{\omega \in \Omega} X_n(\omega) \cdot \Pr[\omega] \right) \\ &= a_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \cdot \mathbb{E}[X_n]. \end{aligned}$$

□

## Beispiel 51

$n$  betrunkene Seeleute torkeln nach dem Landgang in ihre Kojen. Sie haben völlig die Orientierung verloren, weshalb wir annehmen, dass jede Zuordnung der Seeleute zu den  $n$  Betten gleich wahrscheinlich ist (genau ein Seemann pro Bett). Wie viele Seeleute liegen im Mittel im richtigen Bett?

Die Anzahl der Seeleute im richtigen Bett zählen wir mit der Zufallsvariablen  $X$ , die als Summe der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  dargestellt wird, wobei

$$X_i := \begin{cases} 1 & \text{falls Seemann } i \text{ in seinem Bett liegt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar gilt  $X := X_1 + \dots + X_n$ .

## Beispiel 51

Für die Variablen  $X_i$  erhalten wir  $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n}$ , da jedes Bett von Seemann  $i$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit aufgesucht wird.

Daraus folgt

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] = \frac{1}{n},$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Im Mittel hat also nur ein Seemann sein eigenes Bett aufgesucht.

## Satz 52 (Multiplikativität des Erwartungswerts)

Für *unabhängige* Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\mathbb{E}[X_1 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_n].$$

### Beweis:

Wir beweisen den Fall  $n = 2$ . Der allgemeine Fall ist analog.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \cdot Y] &= \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x, Y = y] \\ &\stackrel{\text{Unabh.}}{=} \sum_{x \in W_X} \sum_{y \in W_Y} xy \cdot \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \sum_{y \in W_Y} y \cdot \Pr[Y = y] \\ &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

□

Dass für die Gültigkeit von Satz 52 die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen wirklich notwendig ist, sieht man beispielsweise am Fall  $Y = -X$  für eine Zufallsvariable mit einer von Null verschiedenen Varianz. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = -\mathbb{E}[X^2] \neq -(\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

## Definition 53

Zu einem Ereignis  $A$  heißt die Zufallsvariable

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Indikatorvariable des Ereignisses  $A$ .

### Beobachtung:

Für die Indikatorvariable  $I_A$  gilt nach Definition

$$\mathbb{E}[I_A] = 1 \cdot \Pr[A] + 0 \cdot \Pr[\bar{A}] = \Pr[A].$$

Ebenso gilt

$$\mathbb{E}[I_{A_1} \cdot \dots \cdot I_{A_n}] = \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n],$$

da das Produkt von Indikatorvariablen genau dann gleich 1 ist, wenn alle entsprechenden Ereignisse eintreten.

## Beispiel (Forts.)

Wir betrachten wieder das Beispiel der total betrunkenen Matrosen.

Sei  $A_i$  das Ereignis, dass der  $i$ -te Seemann im richtigen Bett liegt. Mit der Notation der Indikatorvariablen sei  $X_i = I_{A_i}$ . Dann gilt für beliebige  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ :

$$\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[I_{A_i} I_{A_j}] = \Pr[A_i \cap A_j] = \frac{1}{n(n-1)},$$

sowie

$$\mathbb{E}[X_i^2] = 0^2 \cdot \Pr[\bar{A}_i] + 1^2 \cdot \Pr[A_i] = \Pr[A_i] = 1/n.$$

## Beispiel (Forts.)

Daraus folgt wegen der Linearität des Erwartungswerts für  $X = X_1 + \dots + X_n$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} X_i X_j \right] \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2.\end{aligned}$$

Für die Varianz erhalten wir somit den Wert

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2 - 1 = 1.$$

Einfacher Beweis für Satz 9 mit Hilfe von Indikatorvariablen:

Zur Erinnerung:

### Satz 9 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  ( $n \geq 2$ ) gilt:

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] &= \sum_{i=1}^n \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + \dots \\ &+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_l}] + \dots \\ &+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] . \end{aligned}$$

## Beweis:

Zur Erinnerung: Zu Ereignissen  $A_1, \dots, A_n$  wollen wir die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[B]$  des Ereignisses  $B := A_1 \cup \dots \cup A_n$  ermitteln.

Wir betrachten die Indikatorvariablen  $I_i := I_{A_i}$  der Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  und die Indikatorvariable  $I_{\bar{B}}$  des Ereignisses  $\bar{B}$ .

Das Produkt  $\prod_{i=1}^n (1 - I_i)$  ist genau dann gleich 1, wenn  $I_1 = \dots = I_n = 0$ , d.h. wenn  $B$  nicht eintritt. Somit gilt  $I_{\bar{B}} = \prod_{i=1}^n (1 - I_i)$  und wir erhalten:

$$I_{\bar{B}} = 1 - \sum_{1 \leq i \leq n} I_i + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} - \dots + (-1)^n I_1 \cdot \dots \cdot I_n,$$

also

$$\begin{aligned} I_B &= 1 - I_{\bar{B}} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} I_i - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} I_{i_1} I_{i_2} + \dots + (-1)^{n-1} I_1 \cdot \dots \cdot I_n. \end{aligned}$$

## Beweis:

Wegen der Eigenschaften von Indikatorvariablen gilt

$$\Pr[B] = 1 - \Pr[\bar{B}] = 1 - \mathbb{E}[I_{\bar{B}}].$$

Mit Hilfe von Satz 50 „verteilen“ wir den Erwartungswert auf die einzelnen Produkte von Indikatorvariablen. Wenn wir nun  $\mathbb{E}[I_i]$  durch  $\Pr[A_i]$  und allgemein  $\mathbb{E}[I_{i_1} \cdot \dots \cdot I_{i_k}]$  durch  $\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}]$  ersetzen, haben wir Satz 9 (dieses Mal vollständig) bewiesen. □

## Satz 54

Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $X := X_1 + \dots + X_n$  gilt

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n].$$

### Beweis:

Wir betrachten nur den Fall  $n = 2$  mit den Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ .

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] = \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y^2]$$

$$\mathbb{E}[X + Y]^2 = (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2 = \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$$

Wir ziehen die zweite Gleichung von der ersten ab und erhalten

$$\mathbb{E}[(X + Y)^2] - \mathbb{E}[X + Y]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2.$$

Mit Hilfe von Satz 39 folgt die Behauptung. □

Für abhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt Satz 54 im Allgemeinen nicht. Als Beispiel funktioniert wiederum der Fall  $X = -Y$ :

$$\text{Var}[X + Y] = 0 \neq 2 \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y].$$

## 5. Wichtige diskrete Verteilungen

Wir diskutieren nun einige wichtige *diskrete* Verteilungen. Bei diesen Verteilungen handelt es sich um Funktionen, die von gewissen *Parametern* abhängen. Eigentlich betrachten wir also immer eine ganze Familie von ähnlichen Verteilungen.

## 5.1 Bernoulli-Verteilung

Eine Zufallsvariable  $X$  mit  $W_X = \{0, 1\}$  und der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1, \\ 1 - p & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

heißt **Bernoulli-verteilt**. Den Parameter  $p$  nennen wir **Erfolgswahrscheinlichkeit**.

Eine solche Verteilung erhält man z.B. bei einer einzelnen Indikatorvariablen. Es gilt mit  $q := 1 - p$

$$\mathbb{E}[X] = p \text{ und } \text{Var}[X] = pq,$$

wegen  $\mathbb{E}[X^2] = p$  und  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2$ .

Der Name der Bernoulli-Verteilung geht zurück auf den Schweizer Mathematiker **Jakob Bernoulli** (1654–1705). Wie viele andere Mathematiker seiner Zeit hätte auch Bernoulli nach dem Wunsch seines Vaters ursprünglich Theologe werden sollen. Sein Werk *ars conjectandi* stellt eine der ersten Arbeiten dar, die sich mit dem Teil der Mathematik beschäftigen, den wir heute als Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnen.

## 5.2 Binomialverteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable entspricht der Verteilung *einer* Indikatorvariablen. Häufig betrachtet man jedoch Summen von Indikatorvariablen.

### Definition 55

Sei  $X := X_1 + \dots + X_n$  als Summe von  $n$  unabhängigen, Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  definiert. Dann heißt  $X$  **binomialverteilt** mit den Parametern  $n$  und  $p$ . In Zeichen schreiben wir

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

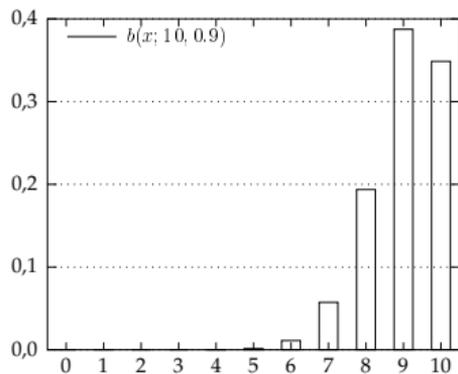
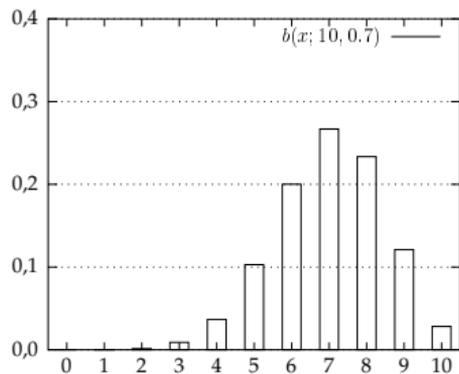
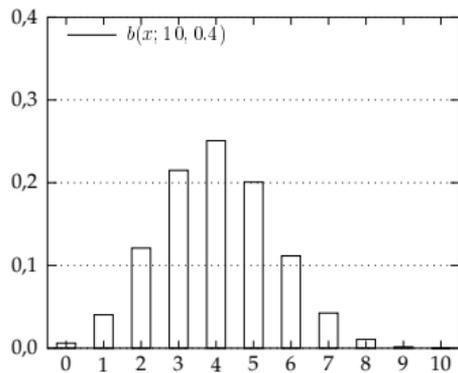
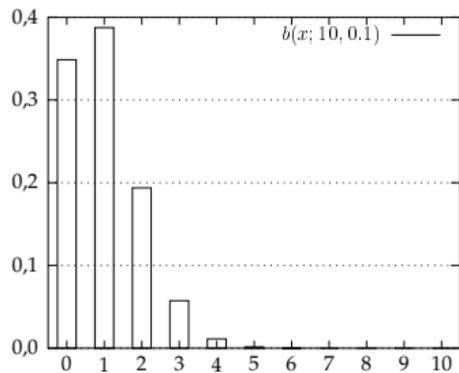
Es gilt  $W_X = \{0, \dots, n\}$ . Die Binomialverteilung besitzt die Dichte

$$f_X(x) := b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

mit  $q := 1 - p$ . Da die Binomialverteilung eine sehr wichtige Rolle spielt, führen wir für die Dichtefunktion die Abkürzung  $b(x; n, p)$  ein.

Mit den Sätzen über Erwartungswert und Varianz von Summen unabhängiger Zufallsvariablen erhalten wir sofort

$$\mathbb{E}[X] = np \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = npq.$$



Dichte der Binomialverteilung

## Satz 56

Wenn  $X \sim \text{Bin}(n_x, p)$  und  $Y \sim \text{Bin}(n_y, p)$  unabhängig sind, dann gilt für  $Z := X + Y$ , dass  $Z \sim \text{Bin}(n_x + n_y, p)$ .

### Beweis:

Die Aussage folgt sofort, wenn man gemäß der Definition der Binomialverteilung  $X$  und  $Y$  als Summen von Indikatorvariablen darstellt.  $Z$  ist dann offensichtlich wieder eine Summe von unabhängigen Indikatorvariablen. □

## 5.3 Geometrische Verteilung

### Definition 57

Die Dichte der **geometrischen Verteilung** mit Parameter/Erfolgswahrscheinlichkeit  $p \in [0, 1]$  und  $q := 1 - p$  ist gegeben durch

$$f_X(i) = pq^{i-1} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}.$$

Für Erwartungswert und Varianz geometrisch verteilter Zufallsvariablen gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = \frac{q}{p^2},$$

denn es gilt:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot pq^{i-1} = p \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

$\mathbb{E}[X^2]$  ergibt sich gemäß der Formel (siehe DS I)

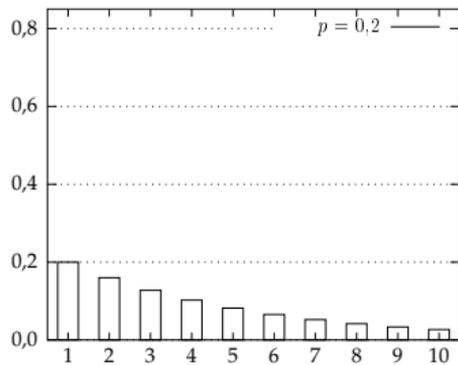
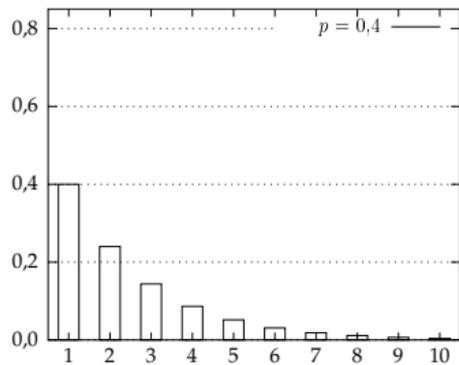
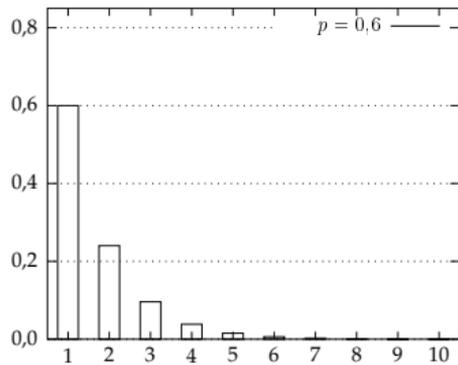
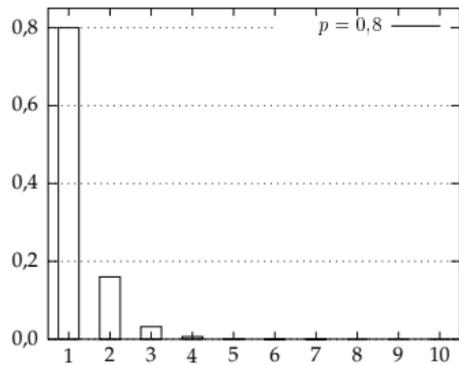
$$\sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^c} = (1-z)^{-c}$$

zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot pq^{i-1} \\ &= p \cdot \left( q \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) \cdot q^i + \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) \cdot q^i \right) \\ &= \frac{q \cdot 2}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}, \end{aligned}$$

und damit

$$\text{Var}[X] = \frac{q}{p^2}.$$



Dichte der geometrischen Verteilung

Sei  $X$  geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Dann ist  $\Pr[X = k]$  die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei einem binären Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  genau in der  $k$ -ten unabhängigen Wiederholung das erste Mal erfolgreich sind.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[X > y + x \mid X > x]$ ?

Da bei den ersten  $x$  Versuchen kein Erfolg eintrat, stellen wir uns vor, dass das „eigentliche“ Experiment erst ab dem  $(x + 1)$ -ten Versuch beginnt. Die Zeit bis zum ersten Erfolg bei diesem neuen Experiment nennen wir  $X'$ . Damit  $X > y + x$  gilt, muss  $X' > y$  gelten. Es ist intuitiv, dass  $X'$  wieder geometrisch verteilt ist mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ , dass also für  $x, y \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\Pr[X > y + x \mid X > x] = \Pr[X' > y]. \quad (6)$$

Formal gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \sum_{i=x+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p = (1-p)^x p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^x p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^x,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Pr[X > y+x \mid X > x] &= \frac{\Pr[X > y+x, X > x]}{\Pr[X > x]} \\ &= \frac{\Pr[X > y+x]}{\Pr[X > x]} \\ &= (1-p)^{y+x} \cdot (1-p)^{-x} = (1-p)^y \\ &= \Pr[X > y].\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft nennt man *Gedächtnislosigkeit*, da eine geometrisch verteilte Zufallsvariable gewissermaßen vergisst, dass sie schon  $x$  Misserfolge hinter sich hat und sich deshalb zum Zeitpunkt  $y + x$  genauso verhält wie ursprünglich zur Zeit  $y$ .

## Warten auf den $n$ -ten Erfolg.

Wir betrachten  $n$  unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , die jeweils geometrisch verteilt sind mit Parameter  $p$ , und bestimmen die Dichte der Zufallsvariablen  $Z := X_1 + \dots + X_n$ . Damit bezeichnet  $Z$  also die Anzahl der Versuche bis zum  $n$ -ten erfolgreichen Experiment (einschließlich).

Falls  $Z = z$  ist, so werden also genau  $n$  erfolgreiche und  $z - n$  nicht erfolgreiche Experimente durchgeführt. Dafür gibt es genau  $\binom{z-1}{n-1}$  Möglichkeiten, von denen jede mit Wahrscheinlichkeit  $p^n(1-p)^{z-n}$  eintritt. Es gilt also

$$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n(1-p)^{z-n}.$$

Die Zufallsvariable  $Z$  nennt man **negativ binomialverteilt** mit Ordnung  $n$ .

## Das Coupon-Collector-Problem

In manchen Branchen legen Firmen den Verpackungen ihrer Produkte oft kleine Bilder oder andere Gegenstände bei, um den Käufer zum Sammeln anzuregen. Wenn es insgesamt  $n$  verschiedene solche Beilagen gibt, wie viele Packungen muss man im Mittel erwerben, bis man eine vollständige Sammlung besitzt? Hierbei nehmen wir an, dass bei jedem Kauf jede Beilage mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt.

Sei

- $X$  die Anzahl der zu tätigen Käufe, und
- bezeichne Phase  $i$  die Schritte vom Erwerb der  $(i - 1)$ -ten Beilage (ausschließlich) bis zum Erwerb der  $i$ -ten Beilage (einschließlich).

Sei etwa  $n = 4$ , und seien die Beilagen mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 identifiziert. Ein Experiment ist z.B.:

$$\underbrace{2}_1, \underbrace{2, 1}_2, \underbrace{2, 2, 3}_3, \underbrace{1, 3, 2, 3, 1, 4}_4 .$$

**Beobachtung:**

Phase  $i$  endet genau dann, wenn wir eine der  $n - i + 1$  Beilagen erhalten, die wir noch nicht besitzen.

Somit ist  $X_i$  geometrisch verteilt mit Parameter  $p = \frac{n-i+1}{n}$  und es gilt  $\mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$ .

Damit folgt aber sofort

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} \\ &= n \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = n \cdot H_n,\end{aligned}$$

wobei  $H_n := \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$  die  **$n$ -te harmonische Zahl** bezeichnet. Da  $H_n = \ln n + O(1)$ , folgt  $\mathbb{E}[X] = n \ln n + O(n)$ .

## 5.4 Poisson-Verteilung

Die Poisson-Verteilung mit dem Parameter  $\lambda \geq 0$  hat den Wertebereich  $W_X = \mathbb{N}_0$  und besitzt die Dichte

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \quad \text{für } i \in \mathbb{N}_0.$$

$f_X$  ist eine zulässige Dichte, da

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.\end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-2}}{(i-2)!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2\end{aligned}$$

und

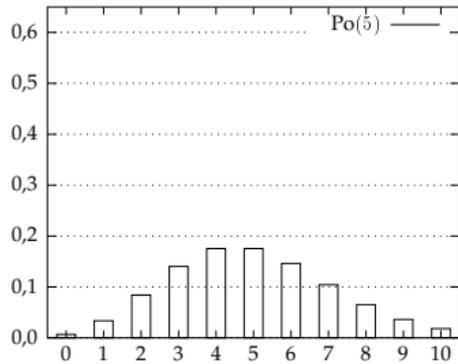
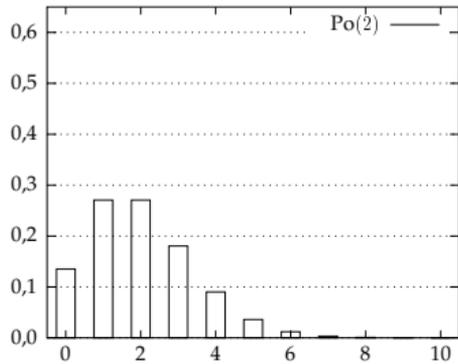
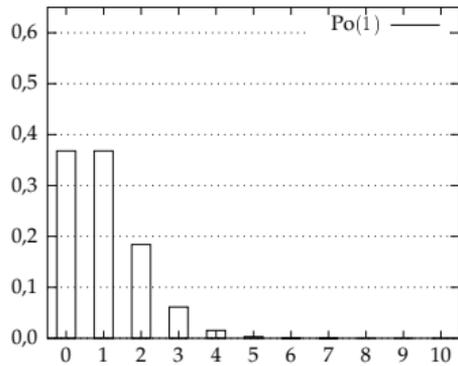
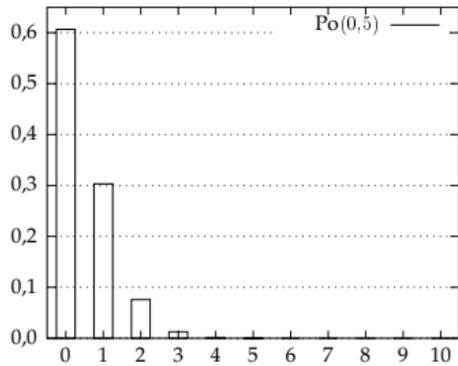
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \text{Var}[X],\end{aligned}$$

folgt

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X(X - 1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad (7)$$

Dafür, dass eine Zufallsvariable  $X$  Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda$  ist, schreiben wir auch

$$X \sim \text{Po}(\lambda).$$



Dichte der Poisson-Verteilung

### 5.4.1 Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Wir betrachten eine Folge von binomialverteilten Zufallsvariablen  $X_n$  mit  $X_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ , wobei  $p_n = \lambda/n$ . Für ein beliebiges  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_n$  den Wert  $k$  annimmt, gleich

$$\begin{aligned} b(k; n, p_n) &= \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} \\ &= \frac{(n \cdot p_n)^k}{k!} \cdot \frac{n^k}{n^k} \cdot (1 - p_n)^{-k} \cdot (1 - p_n)^n \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{n^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

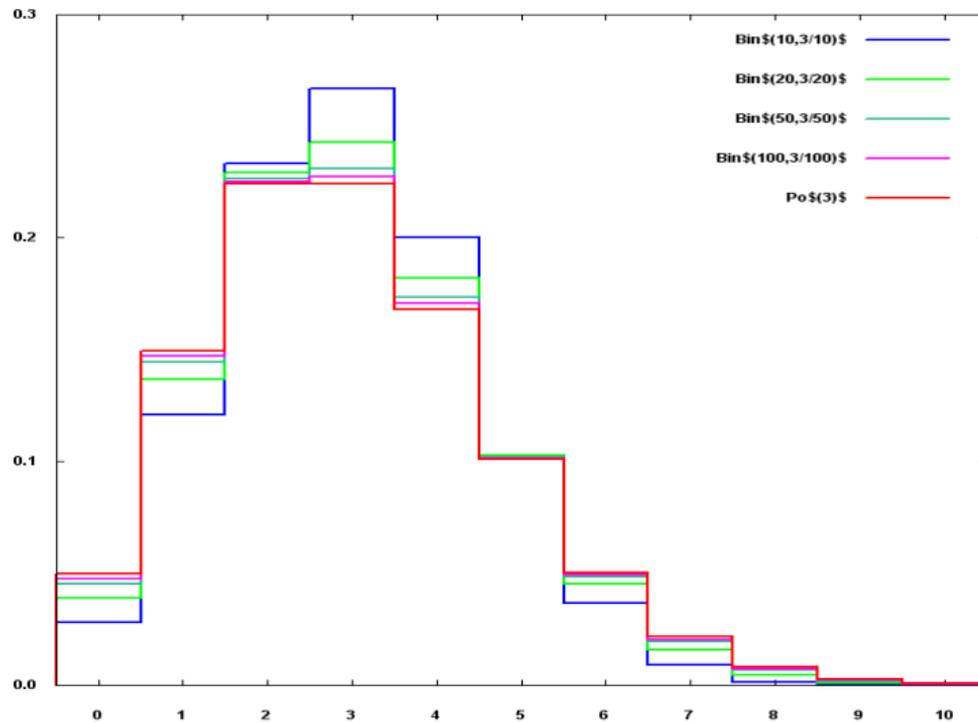
Wir betrachten nun  $n \rightarrow \infty$  und erinnern uns, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^k} &= 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} &= 1, \text{ und} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(k; n, p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Die Wahrscheinlichkeit  $b(k; n, p_n)$  konvergiert also für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Wahrscheinlichkeit, dass eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$  den Wert  $k$  annimmt. Insgesamt folgt somit, dass die Verteilung einer Zufallsvariablen  $X \sim \text{Bin}(n, \lambda/n)$  sich für  $n \rightarrow \infty$  der Poisson-Verteilung  $\text{Po}(\lambda)$  annähert.



Vergleich von Binomial- und Poisson-Verteilung

Ist also  $n$  im Vergleich zu  $\lambda$  hinreichend groß, so kann man die Poisson-Verteilung als Approximation der Binomialverteilung verwenden.

Diese Tatsache wird manchmal auch als **Gesetz seltener Ereignisse** bezeichnet, da die Wahrscheinlichkeit eines einzelnen Treffers  $p_n = \lambda/n$  relativ klein sein muss, wenn die Approximation gute Ergebnisse liefern soll.

Die folgenden Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die Annahme der Poisson-Verteilung gerechtfertigt ist:

- Die Ereignisse treten nie zur gleichen Zeit auf.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem (kleinen) Zeitintervall  $\delta t$  auftritt, ist proportional zur Länge von  $\delta t$ .
- Die Anzahl der Ereignisse in einem festen Zeitintervall hängt nur von dessen Länge ab, nicht aber von der Lage auf der Zeitachse.
- Wenn man zwei disjunkte Zeitintervalle betrachtet, so sind die Anzahlen der Ereignisse in diesen Zeiträumen voneinander unabhängig.

## Beispiel 58

Wir wollen wissen, wie oft eine bestimmte Gegend im Durchschnitt von einer Naturkatastrophe (z.B. Vulkanausbruch) getroffen wird. Aus Statistiken entnehmen wir, dass so ein Ereignis im Mittel  $10^{-4}$ -mal pro Jahr auftritt. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit, dass die Region in einem Jahr mehr als einmal von einem solchen Unglück heimgesucht wird.

Die Voraussetzungen scheinen erfüllt zu sein, die Anzahl  $X$  der Katastrophen durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda = 10^{-4}$  zu modellieren.

Damit gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 2] &= 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \\ &\approx 1 - 0,999900005 - 0,000099990 = 5 \cdot 10^{-9}.\end{aligned}$$

## Summe von Poisson-verteilten Zufallsvariablen

### Satz 59

Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen mit  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  und  $Y \sim \text{Po}(\mu)$ , dann gilt

$$Z := X + Y \sim \text{Po}(\lambda + \mu).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x) = \sum_{x=0}^z \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \cdot \frac{e^{-\mu} \mu^{z-x}}{(z-x)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot \frac{(\lambda+\mu)^z}{z!} \cdot \sum_{x=0}^z \frac{z!}{x!(z-x)!} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^x \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{z-x} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!} \cdot \sum_{x=0}^z \binom{z}{x} p^x (1-p)^{z-x}, \end{aligned}$$

wobei  $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ .

Da die Summe gleich 1 ist, folgt

$$f_Z(z) = e^{-(\lambda+\mu)} \cdot (\lambda+\mu)^z \frac{1}{z!}.$$

□

## Erläuterungen und Beispiele zur Poisson-Verteilung

- In der [Wikipedia](#) finden sich ein paar weitere Details und Beispiele [hier](#).
- Eine Anwendung der Poisson-Verteilung auf die Fußball-Bundesliga (erschieden im Juni-Heft 2010 von [Spektrum der Wissenschaft](#)) ist [hier](#).

## 6. Abschätzen von Wahrscheinlichkeiten

### 6.1 Die Ungleichungen von Markov und Chebyshev

#### Satz 60 (Markov-Ungleichung)

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, die nur nicht-negative Werte annimmt. Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$  mit  $t > 0$ , dass

$$\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq 1/t.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} t \cdot \Pr[X \geq t] &= t \cdot \sum_{x \in W_X, x \geq t} \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X, x \geq t} x \cdot \Pr[X = x] \\ &\leq \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\ &= \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

□

## Alternativer Beweis:

Es gilt

$$E[X] = E[X|X < t]Pr[X < t] + E[X|X \geq t]Pr[X \geq t].$$

Wegen  $E[X|X < t]Pr[X < t] \geq 0$  und  $E[X|X \geq t] \geq t$  folgt sofort

$$E[X] \geq t * Pr[X \geq t].$$

Die Markov-Ungleichung ist nach **Andrey Andreyevich Markov** (1856–1922) benannt, der an der Universität von St. Petersburg bei **Chebyshev** studierte und später dort arbeitete. Neben seiner mathematischen Tätigkeit fiel Markov durch heftige Proteste gegen das Zaren-Regime auf, und nur sein Status als vermeintlich harmloser Akademiker schützte ihn vor Repressalien durch die Behörden. Im Jahr 1913 organisierte er parallel zum dreihundertjährigen Geburtstag der Zarenfamilie Romanov eine Feier zum zweihundertjährigen Geburtstag des **Gesetzes der großen Zahlen** (s.u.).

Die folgende Abschätzung ist nach **Pavnuty Lvovich Chebyshev** (1821–1894) benannt, der ebenfalls an der Staatl. Universität in St. Petersburg wirkte.

### Satz 61 (Chebyshev-Ungleichung)

Sei  $X$  eine Zufallsvariable, und sei  $t \in \mathbb{R}$  mit  $t > 0$ . Dann gilt

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{\text{Var}[X]}{t^2}.$$

Äquivalent dazu:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{\text{Var}[X]}] \leq 1/t^2.$$

## Beweis:

Wir stellen fest, dass

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq t^2].$$

Setze

$$Y := (X - \mathbb{E}[X])^2.$$

Dann gilt  $\mathbb{E}[Y] = \text{Var}[X]$ , und damit mit der Markov-Ungleichung:

$$\Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] = \Pr[Y \geq t^2] \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{t^2} = \frac{\text{Var}[X]}{t^2}.$$



## Beispiel 62

Wir werfen 1000-mal eine ideale Münze und ermitteln die Anzahl  $X$  der Würfe, in denen „Kopf“ fällt.

$X$  ist binomialverteilt mit  $X \sim \text{Bin}(1000, p = \frac{1}{2})$ , also gilt

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}n = 500 \text{ und } \text{Var}[X] = \frac{1}{4}n = 250.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 550-mal „Kopf“ fällt?

## Beispiel 62

Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 550] \leq \Pr[|X - 500| \geq 50] \leq \frac{250}{50^2} = 0,1.$$

Setze nun  $n = 10000$  und betrachte wieder eine maximal 10%-ige Abweichung vom Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[X] = 5000 \text{ und } \text{Var}[X] = 2500, \text{ und damit}$$
$$\Pr[X \geq 5500] \leq \Pr[|X - 5000| \geq 500] \leq \frac{2500}{500^2} = 0,01.$$

## 6.2 Gesetz der großen Zahlen

Wir haben diskutiert, wie Wahrscheinlichkeiten als Grenzwerte von relativen Häufigkeiten aufgefasst werden können.

### Satz 63 (Gesetz der großen Zahlen)

*Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$ . Ferner seien  $\varepsilon, \delta > 0$  beliebig aber fest. Dann gilt für alle  $n \geq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon\delta^2}$ :*

*Sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsvariablen mit derselben Verteilung wie  $X$  und setzt man*

$$Z := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

*so gilt*

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \varepsilon.$$

Beweis:

Für  $Z$  gilt

$$\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{n} \cdot (\mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X],$$

sowie

$$\text{Var}[Z] = \frac{1}{n^2} \cdot (\text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \text{Var}[X] = \frac{\text{Var}[X]}{n}.$$

Mit der Chebyshev-Ungleichung erhalten wir

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] = \Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq \delta] \leq \frac{\text{Var}[Z]}{\delta^2} = \frac{\text{Var}[X]}{n\delta^2} \leq \varepsilon,$$

nach Wahl von  $n$ .



## Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit.

Sei  $X$  eine Indikatorvariable für ein Ereignis  $A$ ,  $\Pr[A] = p$ . Somit ist  $X$  Bernoulli-verteilt mit  $\mathbb{E}[X] = p$ .

$Z = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$  gibt die relative Häufigkeit an, mit der  $A$  bei  $n$  Wiederholungen des Versuchs eintritt, denn

$$Z = \frac{\text{Anzahl der Versuche, bei denen } A \text{ eingetreten ist}}{\text{Anzahl aller Versuche}}.$$

Mit Hilfe des obigen Gesetzes der großen Zahlen folgt

$$\Pr[|Z - p| \geq \delta] \leq \varepsilon,$$

für genügend großes  $n$ . Also nähert sich die relative Häufigkeit von  $A$  bei hinreichend vielen Wiederholungen des Experiments mit beliebiger Sicherheit beliebig nahe an die „wahre“ Wahrscheinlichkeit  $p$  an.

Die obige Variante eines **Gesetzes der großen Zahlen** geht auf **Jakob Bernoulli** zurück, der den Satz in seinem Werk **ars conjectandi** zeigte.

Es soll betont werden, dass das Gesetz der großen Zahlen die

$$\text{relative Abweichung } \left| \frac{1}{n} \sum_i X_i - p \right|$$

und nicht die

$$\text{absolute Abweichung } \left| \sum_i X_i - np \right|$$

abschätzt!

## 6.3 Chernoff-Schranken

### 6.3.1 Chernoff-Schranken für Summen von 0–1–Zufallsvariablen

Die hier betrachtete Art von Schranken ist nach **Herman Chernoff** (\*1923) benannt. Sie finden in der komplexitätstheoretischen Analyse von Algorithmen eine sehr häufige Verwendung.

#### Satz 64

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit  $\Pr[X_i = 1] = p_i$  und  $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$ . Dann gilt für  $X := \sum_{i=1}^n X_i$  und  $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ , sowie jedes  $\delta > 0$ , dass

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left( \frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}} \right)^\mu.$$

## Beweis:

Für  $t > 0$  gilt

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}].$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=1}^n tX_i\right)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_i}].$$

Weiter ist für  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\mathbb{E}[e^{tX_i}] = e^{t \cdot 1} p_i + e^{t \cdot 0} (1 - p_i) = e^t p_i + 1 - p_i = 1 + p_i(e^t - 1),$$

Beweis (Forts.):

und damit

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] &\leq \frac{\prod_{i=1}^n (1 + p_i(e^t - 1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^n \exp(p_i(e^t - 1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} \\ &= \frac{\exp(\sum_{i=1}^n p_i(e^t - 1))}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} =: f(t).\end{aligned}$$

Wir wählen nun  $t$  so, dass  $f(t)$  minimiert wird, nämlich

$$t = \ln(1 + \delta).$$

Damit wird

$$f(t) = \frac{e^{(e^t-1)\mu}}{e^{t(1+\delta)\mu}} = \frac{e^{\delta\mu}}{(1 + \delta)^{(1+\delta)\mu}}.$$



## Beispiel 65

Wir betrachten wieder das Beispiel, dass wir eine faire Münze  $n$ -mal werfen und abschätzen wollen, mit welcher Wahrscheinlichkeit „Kopf“

$$\frac{n}{2}(1 + 10\%)$$

oder öfter fällt.

$n$	Chebyshev	Chernoff
1000	0,1	0,0889
10000	0,01	$0,308 \cdot 10^{-10}$
$n$	$\frac{\frac{1}{4}n}{(0,1 \cdot \frac{1}{2}n)^2}$	$\left( \frac{e^{0,1}}{(1+0,1)^{1+0,1}} \right)^{\frac{1}{2}n}$

## Satz 66

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit  $\Pr[X_i = 1] = p_i$  und  $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$ . Dann gilt für  $X := \sum_{i=1}^n X_i$  und  $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ , sowie jedes  $0 < \delta < 1$ , dass

$$\Pr[X \leq (1 - \delta)\mu] \leq \left( \frac{e^{-\delta}}{(1 - \delta)^{1-\delta}} \right)^\mu.$$

### Beweis:

Analog zum Beweis von Satz 64. □

**Bemerkung:** Abschätzungen, wie sie in Satz 64 und Satz 66 angegeben sind, nennt man auch **tail bounds**, da sie Schranken für die **tails**, also die vom Erwartungswert weit entfernten Bereiche angeben. Man spricht hierbei vom **upper tail** (vergleiche Satz 64) und vom **lower tail** (vergleiche Satz 66).

Die Chernoff-Schranken hängen **exponentiell** von  $\mu$  ab!

## Lemma 67

Für  $0 \leq \delta < 1$  gilt

$$(1 - \delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta+\delta^2/2} \quad \text{und} \quad (1 + \delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta+\delta^2/3}.$$

**Beweis:**

Wir betrachten

$$f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) \quad \text{und} \quad g(x) = -x + \frac{1}{2}x^2.$$

Es gilt für  $0 \leq x < 1$ :

$$g'(x) = x - 1 \leq -\ln(1 - x) - 1 = f'(x)$$

sowie

$$f(0) = 0 = g(0),$$

also im angegebenen Intervall  $f(x) \geq g(x)$ .

Die Ableitung der zweiten Ungleichung erfolgt analog. □

## Korollar 68

Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit  $\Pr[X_i = 1] = p_i$  und  $\Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$ . Dann gelten folgende Ungleichungen für  $X := \sum_{i=1}^n X_i$  und  $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ :

①  $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$  für alle  $0 < \delta \leq 1,81$ ,

②  $\Pr[X \leq (1 - \delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$  für alle  $0 < \delta \leq 1$ ,

③  $\Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$  für alle  $0 < \delta \leq 1$ ,

④  $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu}$  und

⑤  $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$  für  $t \geq 2e\mu$ .

Beweis:

1 und 2 folgen direkt aus Satz 64 bzw. 66 und Lemma 67.

Aus 1 und 2 zusammen folgt 3.

Die Abschätzung 4 erhalten wir direkt aus Satz 64, da für den Zähler gilt

$$e^\delta \leq e^{(1+\delta)}.$$

5 folgt aus 4, indem man  $t = (1 + \delta)\mu$  setzt,  $t \geq 2e\mu$ :

$$\left(\frac{e}{1+\delta}\right)^{(1+\delta)\mu} \leq \left(\frac{e}{t/\mu}\right)^t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

□

## Beispiel 69

Wir betrachten wieder **balls into bins** und werfen  $n$  Bälle unabhängig und gleichverteilt in  $n$  Körbe. Sei

$$X_i := \text{Anzahl der Bälle im } i\text{-ten Korb}$$

für  $i = 1, \dots, n$ , sowie  $X := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ .

Für die Analyse von  $X_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$  beliebig) verwenden wir Aussage 5 von Korollar 68, mit  $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ ,  $\mu = 1$  und  $t = 2 \log n$ . Es folgt

$$\Pr[X_i \geq 2 \log n] \leq 1/n^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\Pr[X \geq 2 \log n] = \Pr[X_1 \geq 2 \log n \vee \dots \vee X_n \geq 2 \log n] \leq n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Es gilt also mit Wahrscheinlichkeit  $\geq 1 - 1/n$ , dass  $X < 2 \log n$  ist.

## Literatur:

-  Torben Hagerup, Christine Rüb:  
*A guided tour of Chernoff bounds*  
Inf. Process. Lett. **33**, pp. 305–308 (1990)

## 7. Erzeugende Funktionen

### 7.1 Einführung

#### Definition 70

Für eine Zufallsvariable  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}_0$  ist die (wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion definiert durch

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X].$$

Eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion ist also die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der Folge  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  mit  $f_i := \Pr[X = i]$ .

Bei wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen haben wir kein Problem mit der **Konvergenz**, da für  $|s| < 1$  gilt

$$\begin{aligned} |G_X(s)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot |s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] = 1. \end{aligned}$$

### Beobachtung:

Sei  $Y := X + t$  mit  $t \in \mathbb{N}_0$ . Dann gilt

$$G_Y(s) = \mathbb{E}[s^Y] = \mathbb{E}[s^{X+t}] = \mathbb{E}[s^t \cdot s^X] = s^t \cdot \mathbb{E}[s^X] = s^t \cdot G_X(s).$$

Ebenso lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] \cdot s^{k-1}, \text{ also}$$

$$G'_X(0) = \Pr[X = 1], \text{ sowie}$$

$$G_X^{(i)}(0) = \Pr[X = i] \cdot i!, \text{ also}$$

$$G_X^{(i)}(0)/i! = \Pr[X = i].$$

## Satz 71 (Eindeutigkeit der w.e. Funktion)

*Die Dichte und die Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$  mit  $W_X \subseteq \mathbb{N}$  sind durch ihre Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion eindeutig bestimmt.*

Beweis:

Folgt aus der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung. □

## Bernoulli-Verteilung

Sei  $X$  eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit  $\Pr[X = 0] = 1 - p$  und  $\Pr[X = 1] = p$ . Dann gilt

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = (1 - p) \cdot s^0 + p \cdot s^1 = 1 - p + ps.$$

## Gleichverteilung auf $\{0, \dots, n\}$

Sei  $X$  auf  $\{0, \dots, n\}$  gleichverteilt, d.h. für  $0 \leq k \leq n$  ist  $\Pr[X = k] = 1/(n + 1)$ .  
Dann gilt

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n + 1} \cdot s^k = \frac{s^{n+1} - 1}{(n + 1)(s - 1)}.$$

## Binomialverteilung

Für  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  gilt nach der binomischen Formel

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot s^k = (1-p+ps)^n.$$

## Geometrische Verteilung

Sei  $X$  eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \cdot s^k \\ &= ps \cdot \sum_{k=1}^{\infty} ((1-p)s)^{k-1} = \frac{ps}{1-(1-p)s}. \end{aligned}$$

## Poisson-Verteilung

Für  $X \sim \text{Po}(\lambda)$  gilt

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot s^k = e^{-\lambda + \lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

## Beispiel 72

Sei  $X$  binomialverteilt mit  $X \sim \text{Bin}(n, \lambda/n)$ , Für  $n \rightarrow \infty$  folgt

$$G_X(s) = \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda s}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda(s-1)}{n}\right)^n \rightarrow e^{\lambda(s-1)}.$$

Man kann beweisen, dass aus der Konvergenz der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion die Konvergenz der Verteilung folgt.

## 7.1.1 Zusammenhang zwischen der w.e. Funktion und den Momenten

Da

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X],$$

gilt

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] = \mathbb{E}[X].$$

### Beispiel 73

Sei  $X$  binomialverteilt mit  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , also

$$G_X(s) = (1 - p + ps)^n.$$

Dann gilt

$$G'_X(s) = n \cdot (1 - p + ps)^{n-1} \cdot p$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np.$$

## Beispiel 73

Ebenso ergibt sich

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1),$$

also etwa

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2.\end{aligned}$$

Andere Momente von  $X$  kann man auf ähnliche Art und Weise berechnen.

## Momenterzeugende Funktionen

### Definition 74

Zu einer Zufallsvariablen  $X$  ist die **momenterzeugende Funktion** gemäß

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

definiert.

Es gilt

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Xs)^i}{i!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^i]}{i!} \cdot s^i$$

und

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}[(e^s)^X] = G_X(e^s).$$

## 7.2 Summen von Zufallsvariablen

### Satz 75 (Erzeugende Funktion einer Summe)

Für unabhängige Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und die Zufallsvariable  $Z := X_1 + \dots + X_n$  gilt

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$

Ebenso gilt

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot M_{X_n}(s).$$

**Beweis:**

Wegen der Unabhängigkeit von  $X_1, \dots, X_n$  gilt

$$G_Z(s) = \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_n}] = \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] = G_{X_1}(s) \cdot \dots \cdot G_{X_n}(s).$$



## Beispiel 76

Seien  $X_1, \dots, X_k$  mit  $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$  unabhängige Zufallsvariable und  $Z := X_1 + \dots + X_k$ . Dann gilt

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^k (1 - p + ps)^{n_i} = (1 - p + ps)^{\sum_{i=1}^k n_i}$$

und somit

$$Z \sim \text{Bin}\left(\sum_{i=1}^k n_i, p\right)$$

(vgl. Satz 56).

Seien  $X_1, \dots, X_k \sim \text{Po}(\lambda)$  unabhängige Zufallsvariablen. Dann folgt für  $Z := X_1 + \dots + X_k$

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^k e^{\lambda(s-1)} = e^{k\lambda(s-1)}$$

und somit  $Z \sim \text{Po}(k\lambda)$  (vgl. Satz 59).

## 7.2.1 Zufällige Summen

Wir betrachten die Situation, dass  $Z := X_1 + \dots + X_N$ , wobei  $N$  ebenfalls eine Zufallsvariable ist.

### Satz 77

*Seien  $X_1, X_2, \dots$  unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $G_X(s)$ .  $N$  sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $G_N(s)$ . Dann besitzt die Zufallsvariable  $Z := X_1 + \dots + X_N$  die Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion  $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ .*

## Beweis:

Nach Voraussetzung ist  $W_N \subseteq \mathbb{N}_0$ . Deshalb folgt mit Satz 36

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^Z \mid N = n] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1 + \dots + X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n \cdot \Pr[N = n] \\ &= \mathbb{E}[(G_X(s))^N] \\ &= G_N(G_X(s)). \end{aligned}$$

□

## 7.3 Rekurrente Ereignisse

### Beispiel 78 (Random Walk im $d$ -dimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^d$ )

Wir betrachten ein Partikel, das sich zufällig auf den Punkten aus  $\mathbb{Z}$  bewegt. Es starte im Punkt 0 und bewege sich in jedem Zeitschritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  vom Punkt  $i$  zum Punkt  $i + 1$  („nach rechts“) bzw.  $i - 1$  („nach links“). Man nennt dieses Experiment auch *Random Walk auf den ganzen Zahlen*. Abbildung 1 veranschaulicht diesen Prozess.

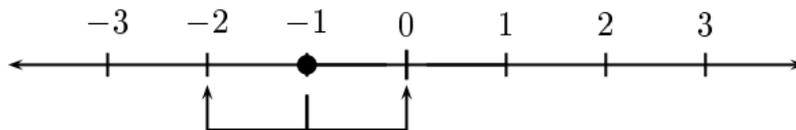


Abbildung: Random Walk auf den ganzen Zahlen

Für  $k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $H_k$  das Ereignis  $H_k :=$  „Partikel befindet sich im  $k$ -ten Schritt im Punkt 0“. Die Anzahl der Schritte nach rechts bzw. nach links bis zum  $k$ -ten Schritt ist **binomialverteilt** mit den Parametern  $n = k$  und  $p = 1/2$ .

Für die Wahrscheinlichkeit  $h_k := \Pr[H_k]$  erhalten wir deshalb

$$h_k = \binom{k}{k/2} 2^{-k},$$

falls  $k$  gerade ist und  $h_k = 0$  sonst.

**Verallgemeinerung auf  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}$ :**

$$h_k = \left( \binom{k}{k/2} 2^{-k} \right)^d \text{ für } k \text{ gerade.}$$

Sei  $h'_k$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel im  $k$ -ten Schritt **zum ersten Mal** zum Punkt  $0^d$  zurückkehrt, und sei  $r := \sum_{k=1}^{\infty} h'_k$  die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel **irgendwann** zum Startpunkt zurückkehrt.

Wie hängt  $r$  von  $d$  ab?

Der gerade beschriebene Prozess hat die Eigenschaft, dass sich das Experiment nach jedem Besuch im Zustand 0 wieder genauso verhält wie beim Start des Prozesses im Zustand 0. Mit solchen Ereignissen beschäftigt sich die **Erneuerungstheorie** (engl. *renewal theory*).

### Definition 79

Die Ereignisse  $H_1, H_2, \dots$  heißen **rekurrent**, wenn für  $i, j \in \mathbb{N}$  mit  $i > j$  gilt, dass

$$\Pr[H_i \mid \bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j] = \Pr[H_{i-j}].$$

Die Zufallsvariable  $Z$  mit  $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  messe die **Wartezeit** bis zum Auftreten des ersten Ereignisses  $H_k$ . Die Dichte von  $Z$  ist definiert durch

$$\Pr[Z = k] = \Pr[\bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k],$$

für  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k]$ .

## Definition 80

Für  $i \in \mathbb{N}$  bezeichne  $h_i := \Pr[H_i]$  die **Auftrittswahrscheinlichkeit** im  $i$ -ten Zeitschritt. Wir setzen  $h_0 := 1$  und erhalten die **erzeugende Funktion der Auftrittswahrscheinlichkeiten** gemäß

$$H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k .$$

Ferner sei die **erzeugende Funktion der Wartezeit  $Z$**  gegeben durch

$$T(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k] \cdot s^k .$$

**Bemerkung:**

$H(s)$  ist keine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion im Sinne der Definition. So gilt i.a. **nicht**  $H(1) = 1$ . Auch  $T(s)$  stellt keine „echte“ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion dar, da

$$\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Pr[Z = k] = 1 - T(1)$$

fehlt!

## Satz 81

Für rekurrente Ereignisse gilt

$$H(s) = \frac{1}{1 - T(s)}.$$

Beweis:

[Skizze] Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für die Auftretswahrscheinlichkeit  $h_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$h_n = \Pr[H_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[H_n \mid Z = k] \cdot \Pr[Z = k].$$

Gemäß der Definition eines rekurrenten Ereignisses gilt für  $k < n$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = \Pr[H_n \mid \bar{H}_1 \cap \dots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k] = \Pr[H_{n-k}]$$

Beweis (Forts.):

sowie

$$\Pr[H_n \mid Z = n] = 1$$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = 0 \text{ für } k > n.$$

Damit folgt für  $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \sum_{k=1}^n h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k] = \sum_{k=0}^n h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k].$$

Für  $n = 0$  ergibt die rechte Seite dieser Gleichung 0. Damit entsteht durch Faltung der beiden Folgen  $(h_0, h_1, \dots)$  und  $(\Pr[Z = 0], \Pr[Z = 1], \dots)$  die Folge  $(0, h_1, h_2, \dots)$ .

Für die erzeugenden Funktionen gilt deshalb  $H(s) - 1 = H(s)T(s)$ .

□

## Beispiel 82

In dem einfachen Fall, dass die Ereignisse  $H_1, H_2, \dots$  unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $p$  eintreten, ist die Wartezeit geometrisch verteilt.

$$H(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ps^k = 1 + \frac{sp}{1-s} = \frac{sp + 1 - s}{1-s}.$$

Daraus folgt

$$T(s) = 1 - \frac{1}{H(s)} = 1 - \frac{1-s}{sp + 1 - s} = \frac{sp}{1 - (1-p)s}.$$

$T(s)$  ist also die w.e. Funktion der geometrischen Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ .

### Korollar 83

Für rekurrente Ereignisse gilt  $\Pr[Z < \infty] = 1$  genau dann, wenn  $H(1) = \infty$  ist, wenn also die Summe  $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$  der Auftrittswahrscheinlichkeiten divergiert.

### Beweis:

Nach Satz 81 gilt  $T(s) = (H(s) - 1)/H(s)$ . Daraus folgt

$$\Pr[Z < \infty] = T(1) = 1 - 1/H(1).$$



## Beispiel 84

Wir wenden Korollar 83 auf den Random Walk im  $\mathbb{Z}^d$  an.

Aus der Stirlingformel folgt

$$n! = \Theta(\sqrt{n}(n/e)^n)$$

und damit für  $d = 1$

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta\left(\frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(\frac{e^n}{\sqrt{nn^n}}\right)^2\right) \\ &= \Theta\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

Also

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-1/2}) = \infty,$$

da die Summe  $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k^\alpha$  für  $\alpha \leq 1$  divergiert. Nach Korollar 83 kehrt das Partikel also mit Wahrscheinlichkeit 1 immer wieder zum Ausgangspunkt zurück.

## Beispiel (Forts.)

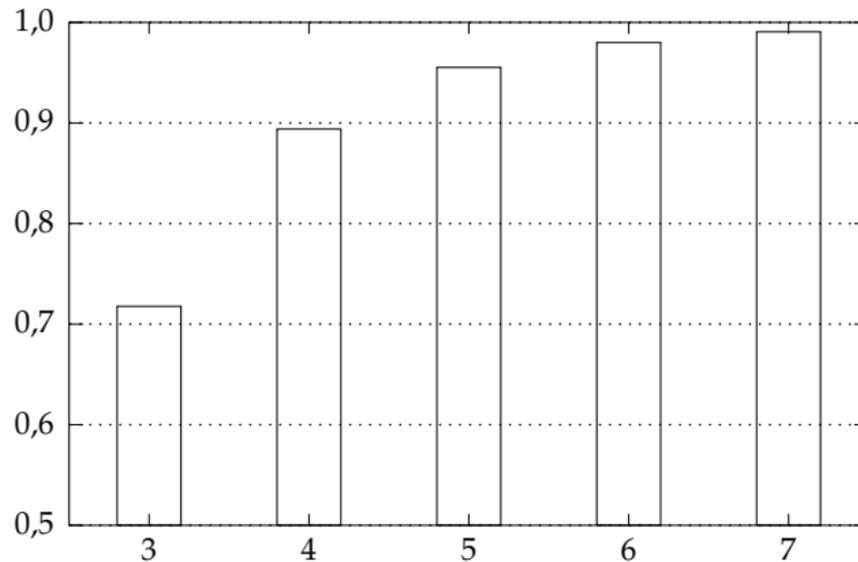
Für  $d \in \mathbb{N}$  gilt allgemein

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-(1/2)d}).$$

Für  $d = 1$  und  $d = 2$  divergiert diese Summe, während sie für  $d \geq 3$  konvergiert. Das Partikel kehrt also im ein- und im zweidimensionalen Raum mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausgangspunkt zurück, im drei- oder höherdimensionalen Raum jedoch nicht mehr. Im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned} & \Pr[\text{„Partikel kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück“}] \\ &= \Pr[Z = \infty] = 1/H(1) = 1 / \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} \\ &\approx 0,7178. \end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)



*WS(„Keine Rückkehr zum Anfang“) für den Random Walk in  $\mathbb{Z}^d$*

## 8. Formelsammlung

### 8.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden seien  $A$  und  $B$ , sowie  $A_1, \dots, A_n$  Ereignisse. Die Notation  $A \uplus B$  steht für  $A \cup B$  und zugleich  $A \cap B = \emptyset$  (disjunkte Vereinigung).  $A_1 \uplus \dots \uplus A_n = \Omega$  bedeutet also, dass die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  eine Partition der Ergebnismenge  $\Omega$  bilden.

$$\Pr[\emptyset] = 0$$

$$0 \leq \Pr[A] \leq 1$$

$$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$$

$$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 9	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr[\bigcup_{i=1}^n A_i] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.

$B \subseteq A_1 \uplus \dots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$\Pr[B] > 0, B \subseteq A_1 \uplus \dots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i B] = \frac{\Pr[B A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^n \Pr[B A_i] \cdot \Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2 A_1] \cdot$ $\dots \cdot \Pr[A_n A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
$A \text{ und } B \text{ unabhängig} \iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

## 8.2 Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen

Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable. Für Erwartungswert und Varianz gelten die folgenden Formeln (sofern  $\mathbb{E}[X]$  und  $\text{Var}[X]$  existieren).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] && \text{Erwartungswert} \\ \left( = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i], \quad \text{falls } W_X \subseteq \mathbb{N}_0 \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot (x - \mathbb{E}[X])^2 && \text{Varianz}\end{aligned}$$

### 8.3 Gesetze zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Seien  $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ,  $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} &\iff \text{für alle } (a_1, \dots, a_n): \\ &\Pr[X_1 = a_1, \dots, X_n = a_n] \\ &= \Pr[X_1 = a_1] \cdot \dots \cdot \Pr[X_n = a_n] \end{aligned}$$

$$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \implies f_1(X_1), \dots, f_n(X_n) \text{ unabhängig}$$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$$

$$X(\omega) \leq Y(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega \implies \\ \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

Monotonie des  
Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X|A_i] \cdot \Pr[A_i]$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\text{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$$

$\mathbb{E}[a_1 X_1 + \dots + a_n X_n]$ $= a_1 \mathbb{E}[X_1] + \dots + a_n \mathbb{E}[X_n]$	<p>Linearität des Erwartungswerts</p>
$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \implies$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot \dots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \dots \cdot \mathbb{E}[X_n]$	<p>Multiplikatивität des Erwartungswerts</p>
$X_1, \dots, X_n \text{ unabhängig} \implies$ $\text{Var}[X_1 + \dots + X_n] = \text{Var}[X_1] + \dots + \text{Var}[X_n]$	<p>Varianz einer Summe</p>

$X \geq 0 \implies$ $\Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$ für $t > 0$	Markov
$\Pr[ X - \mathbb{E}[X]  \geq t]$ $\leq \text{Var}[X]/t^2$ für $t > 0$	Chebyshev
siehe Satz 63	Gesetz der großen Zahlen

# Kapitel II Kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsräume

## 1. Einführung

### 1.1 Motivation

Interpretation der Poisson-Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung.

## Beispiel 85

Wir betrachten das Szenario: Bei einem Druckerserver kommen Aufträge in einer Warteschlange an, die alle  $1/n$  Zeiteinheiten vom Server abgefragt wird. Der Server nimmt also zu den diskreten Zeitpunkte  $1/n, 2/n, 3/n, \dots$  neue Aufträge entgegen. Durch den Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  „verschmelzen“ diese diskreten Zeitpunkte zu einer kontinuierlichen Zeitachse, und für die Zufallsvariable  $T$ , welche die Zeitspanne bis zum Eintreffen des nächsten Auftrags misst, reicht eine diskrete Wertemenge  $W_T$  nicht mehr aus.

## 1.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen

### Definition 86

Eine **kontinuierliche** oder auch **stetige Zufallsvariable**  $X$  und ihr zugrunde liegender **kontinuierlicher (reeller) Wahrscheinlichkeitsraum** sind definiert durch eine integrierbare Dichte(-funktion)  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \, dx = 1.$$

Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$ , die durch Vereinigung  $A = \bigcup_k I_k$  abzählbar vieler paarweise disjunkter Intervalle beliebiger Art (offen, geschlossen, halboffen, einseitig unendlich) gebildet werden kann, heißt **Ereignis**. Ein Ereignis  $A$  tritt ein, wenn  $X$  einen Wert aus  $A$  annimmt. Die Wahrscheinlichkeit von  $A$  ist bestimmt durch

$$\Pr[A] = \int_A f_X(x) \, dx = \sum_k \int_{I_k} f_X(x) \, dx.$$

## Beispiel 87 (Gleichverteilung)

Eine besonders einfache kontinuierliche Dichte stellt die **Gleichverteilung** auf dem Intervall  $[a, b]$  dar. Sie ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

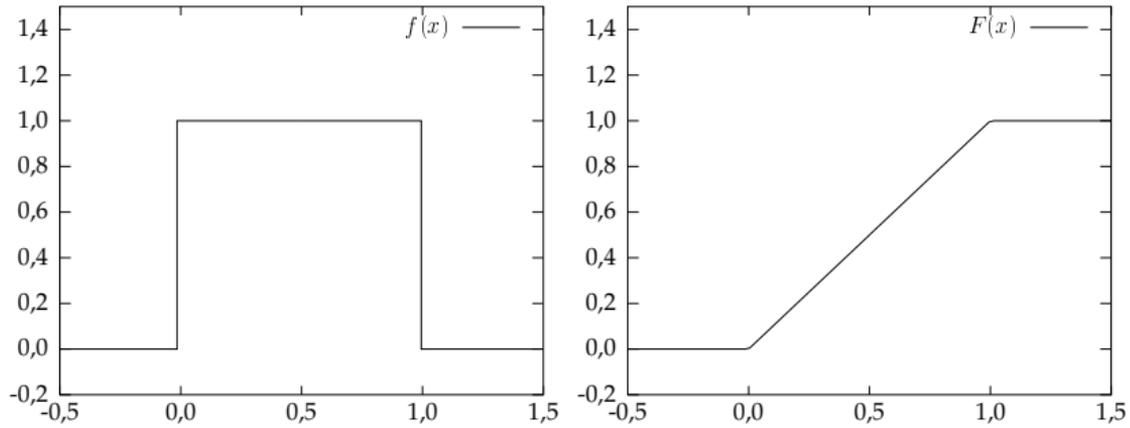
Analog zum diskreten Fall ordnen wir jeder Dichte  $f_X$  eine **Verteilung** oder **Verteilungsfunktion**  $F_X$  zu:

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x] = \Pr[\{t \in \mathbb{R} \mid t \leq x\}] = \int_{-\infty}^x f_X(t) \, dt.$$

## Beispiel 88

Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$



Gleichverteilung über dem Intervall  $[0, 1]$

## Beobachtungen: (Eigenschaften der Verteilungsfunktion)

- $F_X$  ist monoton steigend.
- $F_X$  ist stetig. Man spricht daher auch von einer „stetigen Zufallsvariablen“.
- Es gilt:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .
- Jeder (außer an endlich vielen Punkten) differenzierbaren Funktion  $F$ , welche die zuvor genannten Eigenschaften erfüllt, können wir eine Dichte  $f$  durch  $f(x) = F'(x)$  zuordnen.

Es gilt

$$\Pr[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a).$$

Bei den von uns betrachteten Dichten besteht zwischen den Ereignissen „ $a < X \leq b$ “, „ $a \leq X \leq b$ “, „ $a \leq X < b$ “ und „ $a < X < b$ “ kein wesentlicher Unterschied, da

$$\int_{[a,b]} f(t) \, dt = \int_{]a,b]} f(t) \, dt = \int_{[a,b[} f(t) \, dt = \int_{]a,b[} f(t) \, dt.$$

## 1.3 Kolmogorov-Axiome und $\sigma$ -Algebren

### 1.3.1 $\sigma$ -Algebren

#### Definition 89

Sei  $\Omega$  eine Menge. Eine Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  heißt  **$\sigma$ -Algebra** über  $\Omega$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(E1)  $\Omega \in \mathcal{A}$ .

(E2) Wenn  $A \in \mathcal{A}$ , dann folgt  $\bar{A} \in \mathcal{A}$ .

(E3) Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n \in \mathcal{A}$ . Dann gilt auch  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Für jede (endliche) Menge  $\Omega$  stellt die Menge  $\mathcal{P}(\Omega)$  eine  $\sigma$ -Algebra dar.

Für  $\Omega = \mathbb{R}$  ist die Klasse der *Borel'schen Mengen*, die aus allen Mengen  $A \subseteq \mathbb{R}$  besteht, welche sich durch (abzählbare) Vereinigungen und Schnitte von Intervallen (offen, halboffen oder geschlossen) darstellen lassen, eine  $\sigma$ -Algebra.

## 1.3.2 Kolmogorov-Axiome

### Definition 90 (Wahrscheinlichkeitsraum, Kolmogorov-Axiome)

Sei  $\Omega$  eine beliebige Menge und  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra über  $\Omega$ . Eine Abbildung

$$\Pr[\cdot] : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$$

heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf  $\mathcal{A}$ , wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- 1 (W1)  $\Pr[\Omega] = 1$ .
- 2 (W2)  $A_1, A_2, \dots$  seien paarweise disjunkte Ereignisse. Dann gilt

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i].$$

Für ein Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  heißt  $\Pr[A]$  **Wahrscheinlichkeit** von  $A$ . Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** ist definiert durch das Tupel  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$ .

Die in obiger Definition aufgelisteten Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes wurden von dem russischen Mathematiker **Andrei Nikolaevich Kolmogorov** (1903–1987) formuliert. Kolmogorov gilt als einer der Pioniere der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie, leistete jedoch auch bedeutende Beiträge zu zahlreichen anderen Teilgebieten der Mathematik. Informatikern begegnet sein Name auch im Zusammenhang mit der so genannten Kolmogorov-Komplexität, einem relativ jungen Zweig der Komplexitätstheorie.

Die Eigenschaften in obiger Definition nennt man auch **Kolmogorov-Axiome**.

## Lemma 91

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse  $A, B, A_1, A_2, \dots$  gilt

- 1  $\Pr[\emptyset] = 0, \Pr[\Omega] = 1.$
- 2  $0 \leq \Pr[A] \leq 1.$
- 3  $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A].$
- 4 *Wenn  $A \subseteq B$ , so folgt  $\Pr[A] \leq \Pr[B].$*

## Lemma 91

- ⑤ (Additionssatz) Wenn die Ereignisse  $A_1, \dots, A_n$  paarweise disjunkt sind, so folgt

$$\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^n A_i \right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse  $A, B$  erhalten wir insbesondere

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B].$$

Für eine unendliche Menge von paarweise disjunkten Ereignissen  $A_1, A_2, \dots$  gilt analog  $\Pr \left[ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]$ .

## Beweis:

Wenn wir in Eigenschaft (W2)  $A_1 = \Omega$  und  $A_2, A_3, \dots = \emptyset$  setzen, so ergibt die Eigenschaft, dass  $\Pr[\Omega] + \sum_{i=2}^{\infty} \Pr[\emptyset] = \Pr[\Omega]$ . Daraus folgt  $\Pr[\emptyset] = 0$ .

Regel 2 und Regel 5 gelten direkt nach Definition der Kolmogorov-Axiome und Regel 1.

Regel 3 erhalten wir mit Regel 5 wegen  $1 = \Pr[\Omega] = \Pr[A] + \Pr[\bar{A}]$ .

Für Regel 4 betrachten wir die disjunkten Ereignisse  $A$  und  $C := B \setminus A$ , für die gilt, dass  $A \cup B = A \cup C$ . Mit Regel 5 folgt die Behauptung.  $\square$

### 1.3.3 Lebesgue-Integrale

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **messbar**, falls das Urbild jeder Borel'schen Menge ebenfalls eine Borel'sche Menge ist.

Z.B. ist für jede Borel'sche Menge  $A$  die Indikatorfunktion

$$I_A : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

messbar. Jede stetige Funktion ist messbar. Auch Summen und Produkte von messbaren Funktionen sind wiederum messbar.

Jeder messbaren Funktion kann man ein Integral, das so genannte **Lebesgue-Integral**, geschrieben  $\int f \, d\lambda$ , zuordnen.

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  eine messbare Funktion, so definiert

$$\text{Pr} : A \mapsto \int f \cdot I_A \, d\lambda$$

eine Abbildung auf den Borel'schen Mengen, die die Eigenschaft (W2) der Kolmogorov-Axiome erfüllt. Gilt daher zusätzlich noch  $\text{Pr}[\mathbb{R}] = 1$ , so definiert  $f$  auf natürliche Weise einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \text{Pr})$ , wobei  $\Omega = \mathbb{R}$  und  $\mathcal{A}$  die Menge der Borel'schen Mengen ist.

## 1.4 Rechnen mit kontinuierlichen Zufallsvariablen

### 1.4.1 Funktionen kontinuierlicher Zufallsvariablen

Sei  $Y := g(X)$  mit einer Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Verteilung von  $Y$  erhalten wir durch

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[g(X) \leq y] = \int_C f_X(t) \, dt.$$

Hierbei bezeichnet  $C := \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) \leq y\}$  alle reellen Zahlen  $t \in \mathbb{R}$ , für welche die Bedingung „ $Y \leq y$ “ zutrifft. Das Integral über  $C$  ist nur dann sinnvoll definiert, wenn  $C$  ein zulässiges Ereignis darstellt. Aus der Verteilung  $F_Y$  können wir durch Differenzieren die Dichte  $f_Y$  ermitteln.

## Beispiel 92

Sei  $X$  gleichverteilt auf dem Intervall  $]0, 1[$ . Für eine Konstante  $\lambda > 0$  definieren wir die Zufallsvariable  $Y := -(1/\lambda) \ln X$ .

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr[-(1/\lambda) \ln X \leq y] = \Pr[\ln X \geq -\lambda y] \\ &= \Pr[X \geq e^{-\lambda y}] \\ &= 1 - F_X(e^{-\lambda y}) \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{für } y \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

Damit folgt mit  $f_Y(y) = F'_Y(y)$  sofort

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{für } y \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Zufallsvariable mit einer solchen Dichte  $f_Y$  nennt man *exponentialverteilt*.

## Beispiel 93

Sei  $X$  eine beliebige Zufallsvariable. Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  definieren wir die Zufallsvariable  $Y := a \cdot X + b$ .

Es gilt

$$F_Y(y) = \Pr[aX + b \leq y] = \Pr\left[X \leq \frac{y-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right),$$

und somit

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{dF_X((y-b)/a)}{dy} = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a}.$$

## Simulation von Zufallsvariablen

Unter der **Simulation** einer Zufallsvariablen  $X$  mit Dichte  $f_X$  versteht man die algorithmische Erzeugung von Zufallswerten, deren Verteilung der Verteilung von  $X$  entspricht.

Dazu nehmen wir an, dass die zu simulierende Zufallsvariable  $X$  eine stetige, im **Bildbereich**  $]0, 1[$  streng monoton wachsende Verteilungsfunktion  $F_X$  besitzt. Weiter nehmen wir an, dass  $U$  eine auf  $]0, 1[$  gleichverteilte Zufallsvariable ist, die wir simulieren können.

Aus unserer Annahme über  $F_X$  folgt, dass es zu  $F_X$  eine (eindeutige) inverse Funktion  $F_X^{-1}$  gibt mit  $F_X(F_X^{-1}(x)) = x$  für alle  $x \in ]0, 1[$ .

Sei nun

$$\tilde{X} := F_X^{-1}(U),$$

dann gilt

$$\begin{aligned}\Pr[\tilde{X} \leq t] &= \Pr[F_X^{-1}(U) \leq t] \\ &= \Pr[U \leq F_X(t)] \\ &= F_U(F_X(t)) \\ &= F_X(t).\end{aligned}$$

## Beispiel 94

Im obigen Beispiel der Exponentialverteilung gilt  $F_X(t) = 1 - e^{-t}$  für  $t \geq 0$ , und wir erhalten auf  $]0, 1[$  die Umkehrfunktion  $F_X^{-1}(t) = -\ln(1 - t)$ . Also gilt  $\tilde{X} = F_X^{-1}(U) = -\ln(1 - U)$ .

Statt  $\tilde{X}$  haben wir im Beispiel die Zufallsvariable  $-\ln U$  betrachtet, die aber offensichtlich dieselbe Verteilung besitzt.

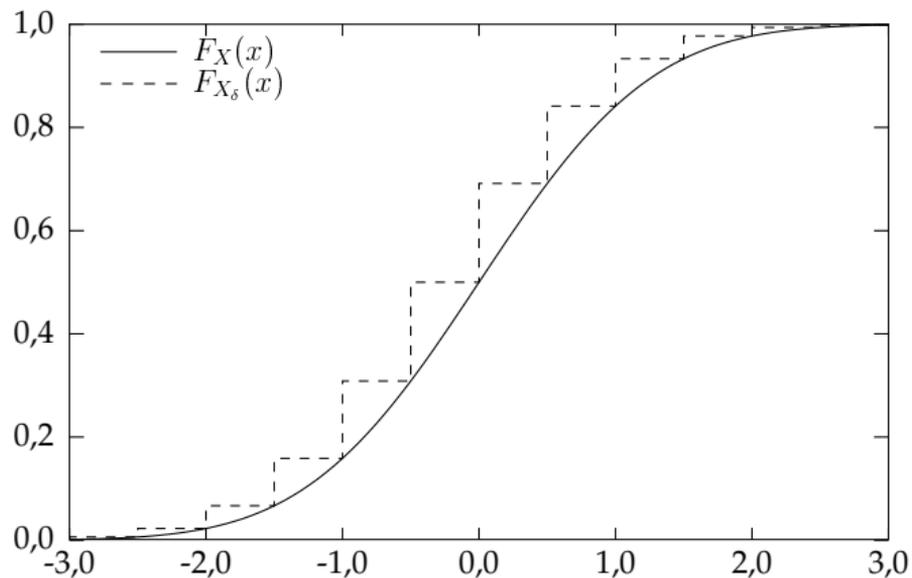
## 1.4.2 Kontinuierliche Zufallsvariablen als Grenzwerte diskreter Zufallsvariablen

Sei  $X$  eine kontinuierliche Zufallsvariable. Wir können aus  $X$  leicht eine diskrete Zufallsvariable konstruieren, indem wir für ein festes  $\delta > 0$  definieren

$$X_\delta = n\delta \iff X \in [n\delta, (n+1)\delta[ \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

Für  $X_\delta$  gilt

$$\Pr[X_\delta = n\delta] = F_X((n+1)\delta) - F_X(n\delta).$$



Für  $\delta \rightarrow 0$  nähert sich die Verteilung von  $X_\delta$  der Verteilung von  $X$  immer mehr an.

### 1.4.3 Erwartungswert und Varianz

#### Definition 95

Für eine kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  ist der Erwartungswert definiert durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X(t) \, dt,$$

sofern das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} |t| \cdot f_X(t) \, dt$  endlich ist.

Für die Varianz gilt entsprechend

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (t - \mathbb{E}[X])^2 \cdot f_X(t) \, dt,$$

wenn  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$  existiert.

## Lemma 96

Sei  $X$  eine kontinuierliche Zufallsvariable, und sei

$$Y := g(X).$$

Dann gilt

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot f_X(t) \, dt.$$

## Beweis:

Wir zeigen die Behauptung nur für den einfachen Fall, dass  $g$  eine lineare Funktion ist, also  $Y := a \cdot X + b$  für  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$ .

Es gilt (siehe obiges Beispiel)

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Y(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \, dt.$$

Durch die Substitution  $u := (t-b)/a$  mit  $du = (1/a) \, dt$  erhalten wir

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (au + b) f_X(u) \, du.$$



## Beispiel 97

Für Erwartungswert und Varianz der Gleichverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a} \, dt = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t \cdot dt \\ &= \frac{1}{2(b-a)} \cdot [t^2]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b t^2 \cdot dt = \frac{b^2 + ba + a^2}{3},$$

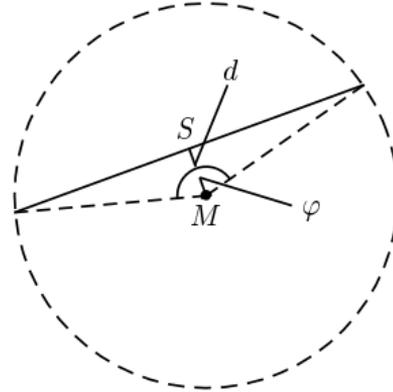
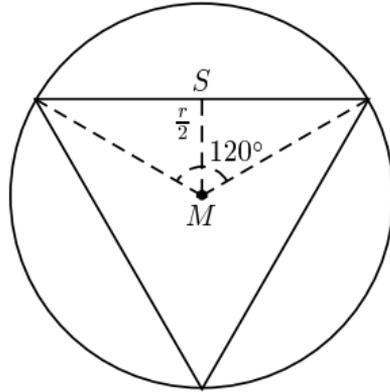
$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \dots = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

#### 1.4.4 Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Das folgende Beispiel zeigt, dass im kontinuierlichen Fall die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich“ nicht immer ganz klar sein muss.

##### **Bertrand'sches Paradoxon**

Wir betrachten einen Kreis mit einem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck. Was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks übersteigt (Ereignis  $A$ )?



## Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand  $\frac{r}{2}$  vom Mittelpunkt  $M$ .
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um  $M$ ) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand  $d$  zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel  $\varphi$  mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln  $\Pr[A]$ .

- 1 Sei  $d \in [0, r]$  gleichverteilt.  $A$  tritt ein, wenn  $d < \frac{r}{2}$ , und es folgt  $\Pr[A] = \frac{1}{2}$ .
- 2 Sei  $\varphi \in [0^\circ, 180^\circ]$  gleichverteilt. Für  $A$  muss gelten  $\varphi \in ]120^\circ, 180^\circ]$ , und es folgt somit  $\Pr[A] = \frac{1}{3}$ .

Siehe auch [diese](#) graphischen Darstellungen!

## 2. Wichtige stetige Verteilungen

### 2.1 Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \quad \text{und} \quad \text{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

## 2.2 Normalverteilung

Die Normalverteilung nimmt unter den stetigen Verteilungen eine besonders prominente Position ein.

### Definition 98

Eine Zufallsvariable  $X$  mit Wertebereich  $W_X = \mathbb{R}$  heißt **normalverteilt** mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ , wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x; \mu, \sigma)$$

besitzt.

In Zeichen schreiben wir  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

$\mathcal{N}(0, 1)$  heißt **Standardnormalverteilung**. Die zugehörige Dichte  $\varphi(x; 0, 1)$  kürzen wir durch  $\varphi(x)$  ab.

Die Verteilungsfunktion zu  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt =: \Phi(x; \mu, \sigma).$$

Diese Funktion heißt **Gauß'sche  $\Phi$ -Funktion** ( $\varphi$  ist nicht geschlossen integrierbar).

## Lemma 99

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \, dx = \sqrt{2\pi}.$$

### Beweis:

Wir berechnen zunächst  $I^2$ :

$$\begin{aligned} I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \, dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \, dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über und setzen  $x := r \cos \phi$  und  $y := r \sin \phi$ .

Dann ist

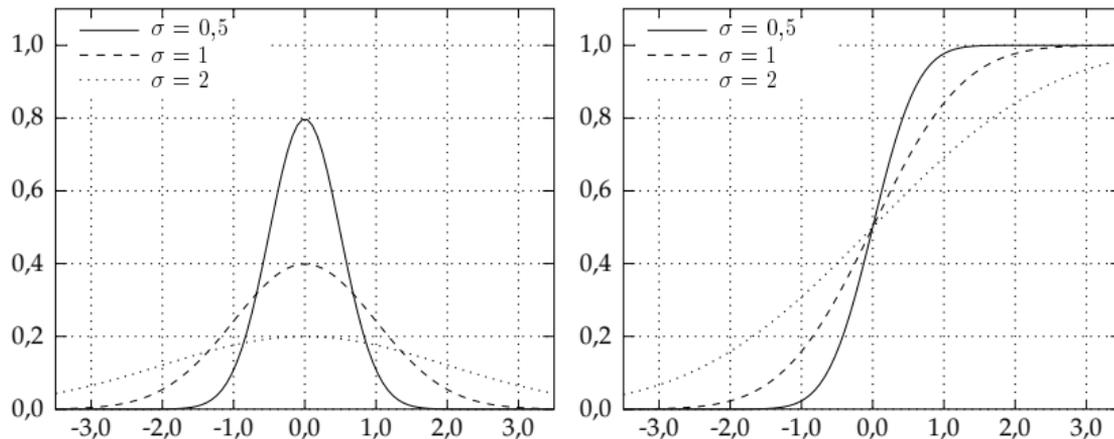
$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{array} \right| = r(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = r$$

Beweis (Forts.):

und wir erhalten

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \, dr \, d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ -e^{-r^2/2} \right]_0^{\infty} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, d\phi = 2\pi. \end{aligned}$$





Dichte und Verteilung von  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

## Satz 100 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei  $X$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Dann gilt für beliebiges  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $b \in \mathbb{R}$ , dass  $Y = aX + b$  normalverteilt ist mit  $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ .

### Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall „ $a > 0$ “:

$$\begin{aligned}\Pr[Y \leq y] &= \Pr[aX + b \leq y] = \Pr\left[X \leq \frac{y - b}{a}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) du.\end{aligned}$$

Nach der Substitution  $u = (v - b)/a$  und  $du = (1/a) \cdot dv$  erhalten wir

Beweis (Forts.):

$$\Pr[Y \leq y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \mathrm{d}v.$$

Also  $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ . Für  $a < 0$  verläuft der Beweis analog. □

Sei also  $X$  eine beliebige  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  und  $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ .

Dann ist nach Satz 100  $Y$   $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt.  $Y$  heißt auch **normiert**.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\Pr[a < X \leq b] &= \Pr\left[\frac{a - \mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

## Satz 101

$X$  sei  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0 \text{ und } \text{Var}[X] = 1.$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Da der Integrand punktsymmetrisch zu  $(0, 0)$  ist, folgt  $\mathbb{E}[X] = 0$ .

Beweis (Forts.):

Mittels Lemma 99 und durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \underbrace{x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\mathbb{E}[X^2] = 1$  ist und somit  $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1$ . □

## Satz 102

$X$  sei  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu \text{ und } \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

**Beweis:**

$Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$  ist standardnormalverteilt. Ferner gilt gemäß der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[Y] + \mu = \mu$$

und

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[\sigma Y + \mu] = \sigma^2 \cdot \text{Var}[Y] = \sigma^2.$$



## 2.3 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist in gewisser Weise das kontinuierliche Analogon zur geometrischen Verteilung. Wie die geometrische Verteilung ist sie „gedächtnislos“. Sie spielt daher vor allem bei der Modellierung von Wartezeiten eine große Rolle.

## Definition 103

Eine Zufallsvariable  $X$  heißt **exponentialverteilt** mit dem Parameter  $\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , wenn sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Für die entsprechende Verteilungsfunktion gilt (für  $x \geq 0$ )

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = \left[ -e^{-\lambda t} \right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Für  $x < 0$  gilt selbstverständlich  $F(x) = 0$ .

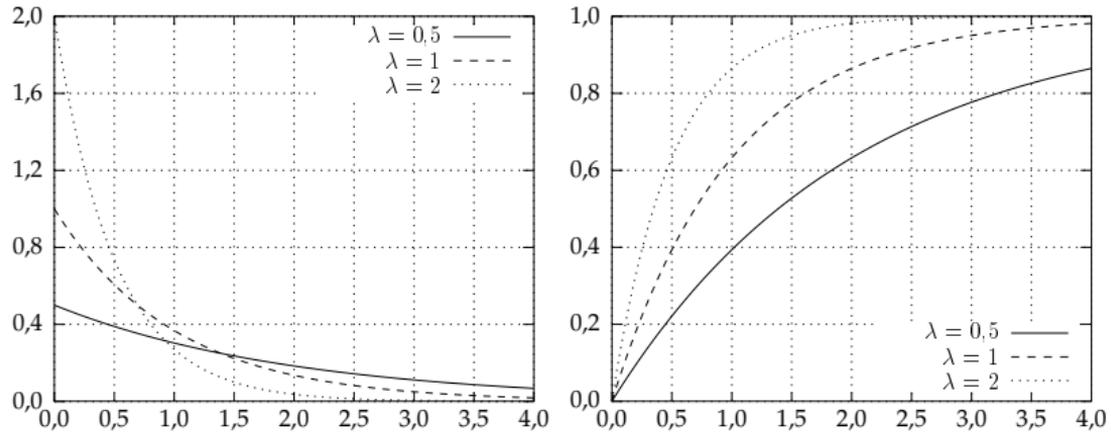
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[ t \cdot (-e^{-\lambda t}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= 0 + \left[ -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^{\infty} t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, dt \\ &= \left[ t^2 \cdot (-e^{-\lambda t}) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2t \cdot e^{-\lambda t} \, dt \\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$



Dichte und Verteilung der Exponentialverteilung

### 2.3.1 Eigenschaften der Exponentialverteilung

#### Satz 104 (Skalierung exponentialverteilter Variablen)

Sei  $X$  eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter  $\lambda$ . Für  $a > 0$  ist die Zufallsvariable  $Y := aX$  wieder exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda/a$ .

Beweis:

$$\begin{aligned}F_Y(x) &= \Pr[Y \leq x] = \Pr[aX \leq x] \\&= \Pr\left[X \leq \frac{x}{a}\right] = F_X\left(\frac{x}{a}\right) \\&= 1 - e^{-\frac{\lambda x}{a}}.\end{aligned}$$



## Gedächtnislosigkeit

### Satz 105 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable  $X$  mit Wertebereich  $\mathbb{R}^+$  ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle  $x, y > 0$  gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]. \quad (*)$$

#### Beweis:

Sei  $X$  exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]} \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt  $X$  eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung (\*) erfüllt. Wir definieren  $g(x) := \Pr[X > x]$ . Für  $x, y > 0$  gilt

$$\begin{aligned}g(x + y) &= \Pr[X > x + y] \\&= \Pr[X > x + y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\&= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y).\end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\right) = \left(g\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch  $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$ .

### Beweis (Forts.):

Da  $X$  nur positive Werte annimmt, muss es ein  $n \in \mathbb{N}$  geben mit  $g(1/n) > 0$ . Wegen  $0 < g(1) \leq 1$  muss es daher auch ein  $\lambda \geq 0$  geben mit  $g(1) = e^{-\lambda}$ .

Nun gilt für beliebige  $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit  $g(r) = e^{-\lambda r}$  für alle  $r \in \mathbb{Q}^+$ .

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}.$$



## Beispiel 106

Über das Cäsium-Isotop  $^{134}_{55}\text{Cs}$  ist bekannt, dass es eine mittlere Lebensdauer von ungefähr 3,03 Jahren oder  $1,55 \cdot 10^6$  Minuten besitzt. Die Zufallsvariable  $X$  messe die Lebenszeit eines bestimmten  $^{134}_{55}\text{Cs}$ -Atoms.  $X$  ist exponentialverteilt mit dem Parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{1,55 \cdot 10^6} \approx 0,645 \cdot 10^{-6} \left[ \frac{1}{\text{min}} \right]$$

Da  $\lambda$  den Kehrwert einer Zeit als Einheit besitzt, spricht man von der **Zerfallsrate**. Auch bei anderen Anwendungen ist es üblich,  $\lambda$  als **Rate** einzuführen.

## 2.3.2 Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

**Erinnerung:** Die **Poisson-Verteilung** lässt sich als Grenzwert der **Binomialverteilung** darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen  $X_n$  mit Parameter  $p_n = \lambda/n$ . Für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_n \leq k \cdot n$ , gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \leq kn] &= \sum_{i=1}^{kn} (1 - p_n)^{i-1} \cdot p_n = p_n \cdot \sum_{i=0}^{kn-1} (1 - p_n)^i \\ &= p_n \cdot \frac{1 - (1 - p_n)^{kn}}{p_n} = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.\end{aligned}$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$  gilt daher für die Zufallsvariablen  $Y_n := \frac{1}{n}X_n$ , dass

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Y_n \leq t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[X_n \leq t \cdot n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{tn} \right] \\ &= 1 - e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Die Folge  $Y_n$  der (skalierten) geometrisch verteilten Zufallsvariablen geht also für  $n \rightarrow \infty$  in eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$  über.

## 3. Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

### 3.1 Mehrdimensionale Dichten

#### Beobachtung

Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen  $X, Y$  wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über  $\mathbb{R}^2$  durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1$$

beschrieben. Für ein Ereignis  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy.$$

Unter einem **Bereich**  $B$  verstehen wir dabei Mengen der Art

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dabei können die einzelnen Intervallgrenzen auch „offen“ bzw.  $\pm\infty$  sein.

Analog zum eindimensionalen Fall ordnen wir der Dichte  $f_{X,Y}$  eine (gemeinsame) Verteilung  $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  zu:

$$F_{X,Y}(x, y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

## 3.2 Randverteilungen und Unabhängigkeit

### Definition 107

Sei  $f_{X,Y}$  die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Die **Randverteilung** der Variablen  $X$  ist gegeben durch

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) \, dv \right] du.$$

Analog nennen wir

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) \, dv$$

die **Randdichte** von  $X$ . Entsprechende Definitionen gelten symmetrisch für  $Y$ .

## Definition 108

Zwei kontinuierliche Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  heißen **unabhängig**, wenn

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq y]$$

für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Differentiation ergibt

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

Für mehrere Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt analog:  $X_1, \dots, X_n$  sind genau dann unabhängig, wenn

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

bzw.

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

### 3.3 Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

#### Warten auf mehrere Ereignisse

##### Satz 109

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann ist auch  $X := \min\{X_1, \dots, X_n\}$  exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

##### Beweis:

Der allgemeine Fall folgt mittels Induktion aus dem für  $n = 2$ . Für die Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt:

$$\begin{aligned} 1 - F_X(t) &= \Pr[X > t] = \Pr[\min\{X_1, X_2\} > t] \\ &= \Pr[X_1 > t, X_2 > t] \\ &= \Pr[X_1 > t] \cdot \Pr[X_2 > t] \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned}$$



Anschaulich besagt Satz 109, dass sich die Raten addieren, wenn man auf das erste Eintreten eines Ereignisses aus mehreren unabhängigen Ereignissen wartet. Wenn beispielsweise ein Atom die Zerfallsrate  $\lambda$  besitzt, so erhalten wir bei  $n$  Atomen die Zerfallsrate  $n\lambda$  (wie uns auch die Intuition sagt).

## Poisson-Prozess

Wir hatten bei der Diskussion der geometrischen und der Poisson-Verteilung festgestellt:

Wenn der zeitliche Abstand der Treffer geometrisch verteilt ist, so ist ihre Anzahl in einer festen Zeitspanne binomialverteilt.

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ , wobei wir die Trefferwahrscheinlichkeit mit  $p_n = \lambda/n$  ansetzen, konvergiert die geometrische Verteilung gegen die Exponentialverteilung und die Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung. Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  erwarten wir deshalb die folgende Aussage:

Wenn man Ereignisse zählt, deren zeitlicher Abstand exponentialverteilt ist, so ist die Anzahl dieser Ereignisse in einer festen Zeitspanne Poisson-verteilt.

Seien  $T_1, T_2 \dots$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$ . Die Zufallsvariable  $T_i$  modelliert die Zeit, die zwischen Treffer  $i - 1$  und  $i$  vergeht.

Für den Zeitpunkt  $t > 0$  definieren wir

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_1 + \dots + T_n \leq t\}.$$

$X(t)$  gibt also an, wie viele Treffer sich bis zur Zeit  $t$  (von Zeit Null ab) ereignet haben. Es gilt:

## Fakt 110

Seien  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen und sei  $X(t)$  für  $t > 0$  wie oben definiert. Dann gilt:  $X(t)$  ist genau dann Poisson-verteilt mit Parameter  $t\lambda$ , wenn es sich bei  $T_1, T_2, \dots$  um exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$  handelt.

Zum Zufallsexperiment, das durch  $T_1, T_2, \dots$  definiert ist, erhalten wir für jeden Wert  $t > 0$  eine Zufallsvariable  $X(t)$ . Hierbei können wir  $t$  als Zeit interpretieren und  $X(t)$  als Verhalten des Experiments zur Zeit  $t$ . Eine solche Familie  $(X(t))_{t>0}$  von Zufallsvariablen nennt man allgemein einen **stochastischen Prozess**. Der hier betrachtete Prozess, bei dem  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen sind, heißt **Poisson-Prozess** und stellt ein fundamentales und zugleich praktisch sehr bedeutsames Beispiel für einen stochastischen Prozess dar.

## Beispiel 111

Wir betrachten eine Menge von Jobs, die auf einem Prozessor sequentiell abgearbeitet werden. Die Laufzeiten der Jobs seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda = 1/30[1/s]$ . Jeder Job benötigt also im Mittel  $30s$ .

Gemäß Fakt 110 ist die Anzahl von Jobs, die in einer Minute vollständig ausgeführt werden, Poisson-verteilt mit Parameter  $t\lambda = 60 \cdot (1/30) = 2$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute höchstens ein Job abgearbeitet wird, beträgt in diesem Fall ( $t\lambda = 2$ )

$$e^{-t\lambda} + t\lambda e^{-t\lambda} \approx 0,406 .$$

### 3.4 Summen von Zufallsvariablen

#### Satz 112

Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen. Für die Dichte von  $Z := X + Y$  gilt

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) \, dx.$$

#### Beweis:

Nach Definition der Verteilungsfunktion gilt

$$F_Z(t) = \Pr[Z \leq t] = \Pr[X + Y \leq t] = \int_{A(t)} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

wobei  $A(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq t\}$ .

## Beweis (Forts.):

Aus der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  folgt

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \int_{A(t)} f_X(x) \cdot f_Y(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \left( \int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

Mittels der Substitution  $z := x + y$ ,  $dz = dy$  ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) \, dy = \int_{-\infty}^t f_Y(z - x) \, dz$$

und somit

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) \, dx \right) dz.$$



## Satz 113 (Additivität der Normalverteilung)

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und normalverteilt mit den Parametern  $\mu_i, \sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Es gilt: Die Zufallsvariable

$$Z := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n$  und Varianz  $\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$ .

### Beweis:

Wir beweisen zunächst den Fall  $n = 2$  und  $a_1 = a_2 = 1$ . Nach Satz 112 gilt für  $Z := X_1 + X_2$ , dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-y) \cdot f_{X_2}(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}_{=:v}\right) \, dy. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Wir setzen

$$\begin{aligned}\mu &:= \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma^2 &:= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ v_1 &:= (z - \mu)/\sigma \\ v_2^2 &:= v - v_1^2\end{aligned}$$

Damit ergibt sich unmittelbar

$$v_2^2 = \frac{(z - y - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{(z - \mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2},$$

woraus wir

$$v_2 = \frac{y\sigma_1^2 - \mu_2\sigma_1^2 + y\sigma_2^2 - z\sigma_2^2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma}$$

ermitteln.

## Beweis (Forts.):

Damit folgt für die gesuchte Dichte

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) dy.$$

Wir substituieren noch

$$t := v_2 \text{ und } dt = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2} dy$$

und erhalten

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

Mit Lemma 99 folgt, dass  $f_Z(z) = \varphi(z; \mu, \sigma)$  ist.

## Beweis (Forts.):

Daraus erhalten wir die Behauptung für  $n = 2$ , denn den Fall  $Z := a_1X_1 + a_2X_2$  für beliebige Werte  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  können wir leicht mit Hilfe von Satz 100 auf den soeben bewiesenen Fall reduzieren. Durch Induktion kann die Aussage auf beliebige Werte  $n \in \mathbb{N}$  verallgemeinert werden. □

### 3.5 Momenterzeugende Funktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Für diskrete Zufallsvariablen  $X$  haben wir die momenterzeugende Funktion

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

eingeführt. Diese Definition kann man unmittelbar auf kontinuierliche Zufallsvariablen übertragen. Die für  $M_X(s)$  gezeigten Eigenschaften bleiben dabei erhalten.

## Beispiel 114

Für eine auf  $[a, b]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $U$  gilt

$$\begin{aligned}M_U(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx \\&= \left[ \frac{e^{tx}}{t(b-a)} \right]_a^b \\&= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}.\end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable  $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt

$$\begin{aligned}M_N(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi \\&= e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\xi)^2/2} d\xi \\&= e^{t^2/2}.\end{aligned}$$

## Beispiel (Forts.)

Daraus ergibt sich für  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  wegen  $\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\&= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}[e^{(t\sigma) \cdot \frac{Y-\mu}{\sigma}}] \\&= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\&= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2} .\end{aligned}$$

Weiterer Beweis von Satz 113:

Beweis:

Gemäß dem vorhergehenden Beispiel gilt

$$M_{X_i}(t) = e^{t\mu_i + (t\sigma_i)^2/2}.$$

Wegen der Unabhängigkeit der  $X_i$  folgt

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{t(a_1X_1 + \dots + a_nX_n)}] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{(a_it)X_i}] \\ &= \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_it) \\ &= \prod_{i=1}^n e^{a_it\mu_i + (a_it\sigma_i)^2/2} \\ &= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2}, \end{aligned}$$

mit  $\mu = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$  und  $\sigma^2 = a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2$ . □

## 4. Zentraler Grenzwertsatz

### Satz 115 (Zentraler Grenzwertsatz)

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  besitzen jeweils dieselbe Verteilung und seien unabhängig. Erwartungswert und Varianz von  $X_i$  existieren für  $i = 1, \dots, n$  und seien mit  $\mu$  bzw.  $\sigma^2$  bezeichnet ( $\sigma^2 > 0$ ).

Die Zufallsvariablen  $Y_n$  seien definiert durch  $Y_n := X_1 + \dots + X_n$  für  $n \geq 1$ . Dann folgt, dass die Zufallsvariablen

$$Z_n := \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

*asymptotisch standardnormalverteilt* sind, also  $Z_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Etwas formaler ausgedrückt gilt: Die Folge der zu  $Z_n$  gehörenden Verteilungsfunktionen  $F_n$  hat die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wir sagen dazu auch: Die Verteilung von  $Z_n$  **konvergiert** gegen die Standardnormalverteilung für  $n \rightarrow \infty$ .

Dieser Satz ist von großer Bedeutung für die Anwendung der Normalverteilung in der Statistik. Der Satz besagt, dass sich die Verteilung einer Summe **beliebiger** unabhängiger Zufallsvariablen (mit endlichem Erwartungswert und Varianz) der Normalverteilung umso mehr annähert, je mehr Zufallsvariablen an der Summe beteiligt sind.

## Beweis:

Wir betrachten  $X_i^* := (X_i - \mu)/\sigma$  für  $i = 1, \dots, n$  mit  $\mathbb{E}[X_i^*] = 0$  und  $\text{Var}[X_i^*] = 1$ .  
Damit gilt (gemäß vorhergehendem **Beispiel**)

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \mathbb{E}[e^{tZ}] = \mathbb{E}[e^{t(X_1^* + \dots + X_n^*)/\sqrt{n}}] \\ &= M_{X_1^*}(t/\sqrt{n}) \cdot \dots \cdot M_{X_n^*}(t/\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Für beliebiges  $i$  betrachten wir die Taylorentwicklung von  $M_{X_i^*}(t) =: h(t)$  an der Stelle  $t = 0$

$$h(t) = h(0) + h'(0) \cdot t + \frac{h''(0)}{2} \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$h'(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot X_i^*] \text{ und } h''(t) = \mathbb{E}[e^{tX_i^*} \cdot (X_i^*)^2].$$

## Beweis (Forts.):

Damit gilt

$$h'(0) = \mathbb{E}[X_i^*] = 0 \text{ und } h''(0) = \mathbb{E}[(X_i^*)^2] = \text{Var}[X] = 1.$$

Durch Einsetzen in die Taylorreihe folgt  $h(t) = 1 + t^2/2 + \mathcal{O}(t^3)$ , und wir können  $M_Z(t)$  umschreiben zu

$$M_Z(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{t^3}{n^{3/2}}\right)\right)^n \rightarrow e^{t^2/2} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Aus der Konvergenz der momenterzeugenden Funktion folgt auch die Konvergenz der Verteilung. Damit ist  $Z$  asymptotisch normalverteilt.

## Beweis (Forts.):

Die momenterzeugende Funktion existiert leider nicht bei allen Zufallsvariablen und unser Beweis ist deshalb unvollständig. Man umgeht dieses Problem, indem man statt der momenterzeugenden Funktion die so genannte **charakteristische Funktion**  $\tilde{M}_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$  betrachtet. Für Details verweisen wir auf die einschlägige Literatur. □

Der Zentrale Grenzwertsatz hat die folgende intuitive Konsequenz:

*Wenn eine Zufallsgröße durch lineare Kombination vieler unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen entsteht, so erhält man näherungsweise eine Normalverteilung.*

Ein wichtiger Spezialfall des Zentralen Grenzwertsatzes besteht darin, dass die auftretenden Zufallsgrößen Bernoulli-verteilt sind.

### Korollar 116 (Grenzwertsatz von de Moivre)

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ . Dann gilt für die Zufallsvariable  $H_n$  mit

$$H_n := X_1 + \dots + X_n$$

für  $n \geq 1$ , dass die Verteilung der Zufallsvariablen

$$H_n^* := \frac{H_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

für  $n \rightarrow \infty$  gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

### Beweis:

Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem Zentralen Grenzwertsatz, da  $\mu = \frac{1}{n}\mathbb{E}[H_n] = p$  und  $\sigma^2 = \frac{1}{n}\text{Var}[H_n] = p(1 - p)$ . □

### Bemerkung

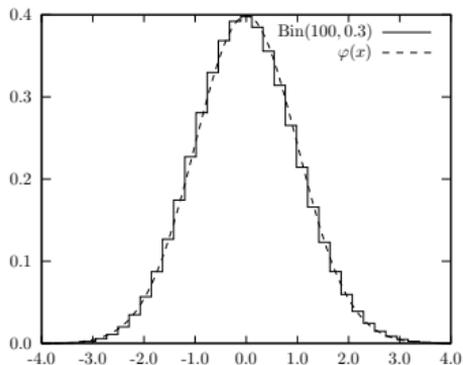
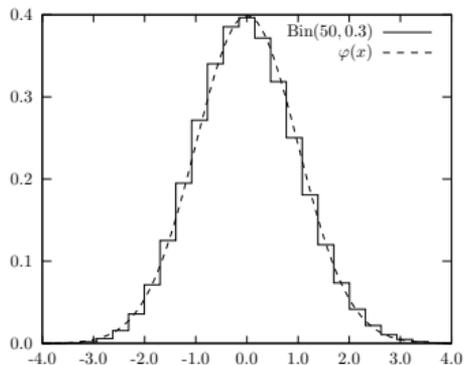
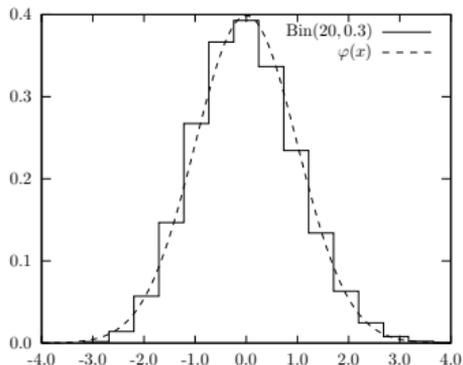
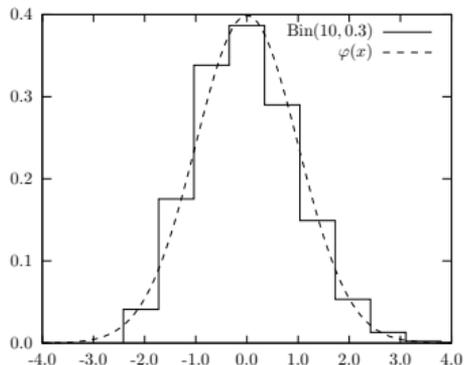
Wenn man  $X_1, \dots, X_n$  als Indikatorvariablen für das Eintreten eines Ereignisses  $A$  bei  $n$  unabhängigen Wiederholungen eines Experimentes interpretiert, dann gibt  $H_n$  die absolute Häufigkeit von  $A$  an.

## 4.1 Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

Korollar 116 ermöglicht, die Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung aufzufassen. Die folgende Aussage ist eine Konsequenz von Korollar 116:

### Korollar 117

*Sei  $H_n \sim \text{Bin}(n, p)$  eine binomialverteilte Zufallsvariable. Die Verteilung von  $H_n/n$  konvergiert gegen  $\mathcal{N}(p, p(1-p)/n)$  für  $n \rightarrow \infty$ .*



## Vergleich von Binomial- und Normalverteilung

$\text{Bin}(n, 0.3)$  bei  $0.3n$  zentriert, mit  $\sqrt{0.3 \cdot 0.7n}$  horizontal gestaucht und vertikal gestreckt

Historisch gesehen entstand Korollar 116 vor Satz 115.

Für den Fall  $p = 1/2$  wurde Korollar 116 bereits von **Abraham de Moivre** (1667–1754) bewiesen. De Moivre war gebürtiger Franzose, musste jedoch aufgrund seines protestantischen Glaubens nach England fliehen. Dort wurde er unter anderem Mitglied der Royal Society, erhielt jedoch niemals eine eigene Professur.

Die allgemeine Formulierung von Korollar 116 geht auf **Pierre Simon Laplace** (1749–1827) zurück. Allerdings vermutet man, dass die Lösung des allgemeinen Falls  $p \neq 1/2$  bereits de Moivre bekannt war.

## 4.2 Elementarer Beweis des Grenzwertsatzes von de Moivre für $p = 1/2$

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b]$  für  $p = 1/2$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \leq b$ . Wenn die Verteilung von  $H_{2n}^*$ , wie in Korollar 116 angegeben, gegen  $\mathcal{N}(0, 1)$  konvergiert, so sollte  $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] \approx \int_a^b \varphi(t) \, dt$  für genügend große  $n$  gelten. Wir schreiben  $f(n) \sim_{\infty} g(n)$  für  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n) = 1$ , wollen also zeigen:

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] \sim_{\infty} \int_a^b \varphi(t) \, dt.$$

Da für  $H_{2n} \sim \text{Bin}(2n, 1/2)$  gilt, dass  $\mathbb{E}[H_{2n}] = n$  und  $\text{Var}[H_{2n}] = n/2$  ist, erhalten wir

$$H_{2n}^* = \frac{H_{2n} - n}{\sqrt{n/2}},$$

und es folgt

$$\begin{aligned}\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] &= \Pr[n + a\sqrt{n/2} \leq H_{2n} \leq n + b\sqrt{n/2}] \\ &= \sum_{i \in I_n} \Pr[H_{2n} = n + i]\end{aligned}$$

für  $I_n := \{z \in \mathbb{Z} \mid a\sqrt{n/2} \leq z \leq b\sqrt{n/2}\}$ . Damit ist

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] = \sum_{i \in I_n} \underbrace{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{=: p_{n,i}}.$$

Es gilt

$$\max_i p_{n,i} \leq p_n^* := \binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n},$$

und mit der Stirling'schen Approximation für  $n!$

$$p_n^* \sim_{\infty} \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{(n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n})^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ersetzen wir nun die  $p_{n,i}$  durch  $p_n^*$ , so entsteht dabei ein Fehler, den wir mit  $q_{n,i} := \frac{p_{n,i}}{p_n^*}$  bezeichnen.

Für  $i > 0$  gilt

$$\begin{aligned} q_{n,i} &= \frac{\binom{2n}{n+i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\binom{2n}{n} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \frac{(2n)! \cdot n! \cdot n!}{(n+i)! \cdot (n-i)! \cdot (2n)!} \\ &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} (n-j)}{\prod_{j=1}^i (n+j)} = \prod_{j=1}^i \frac{n-j+1}{n+j} = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{2j-1}{n+j}\right). \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Binomialkoeffizienten gilt  $q_{n,-i} = q_{n,i}$ , womit auch der Fall  $i < 0$  abgehandelt ist.

Man macht sich leicht klar, dass  $1 - 1/x \leq \ln x \leq x - 1$  für  $x > 0$  gilt. Damit schließen wir, dass

$$\begin{aligned} \ln \left( \prod_{j=1}^i \left( 1 - \frac{2j-1}{n+j} \right) \right) &= \sum_{j=1}^i \ln \left( 1 - \frac{2j-1}{n+j} \right) \\ &\leq - \sum_{j=1}^i \frac{2j-1}{n+j} \leq - \sum_{j=1}^i \frac{2j-1}{n+i} \\ &= - \frac{i(i+1) - i}{n+i} = - \frac{i^2}{n} + \frac{i^3}{n(n+i)} \\ &= - \frac{i^2}{n} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \end{aligned}$$

da  $i = \mathcal{O}(\sqrt{n})$  für  $i \in I_n$ .

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}\ln \left( \prod_{j=1}^i \left( 1 - \frac{2j-1}{n+j} \right) \right) &\geq \sum_{j=1}^i \left( 1 - \left( 1 - \frac{2j-1}{n+j} \right)^{-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^i \frac{-2j+1}{n-j+1} \geq - \sum_{j=1}^i \frac{2j-1}{n-i} \\ &= -\frac{i^2}{n-i} = -\frac{i^2}{n} - \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right).\end{aligned}$$

Zusammen haben wir

$$e^{-\frac{i^2}{n-i}} = e^{-\frac{i^2}{n} - \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)} \leq q_{n,i} \leq e^{-\frac{i^2}{n} + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}$$

Wegen  $e^{\pm \mathcal{O}(1/\sqrt{n})} = 1 \pm o(1)$  folgt daraus  $q_{n,i} \sim_{\infty} e^{-i^2/n}$ .

Damit schätzen wir nun  $\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b]$  weiter ab:

$$\Pr[a \leq H_{2n}^* \leq b] = \sum_{i \in I_n} p_n^* \cdot q_{n,i} \sim_{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \sum_{i \in I_n} e^{-i^2/n}}_{=: S_n}.$$

Mit  $\delta := \sqrt{2/n}$  können wir die Summe  $S_n$  umschreiben zu

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{i \in I_n} \delta e^{-(i\delta)^2 \cdot \frac{1}{2}}.$$

Diese Summe entspricht einer Näherung für  $\int_a^b \varphi(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} \, dt$  durch Aufteilung der integrierten Fläche in Balken der Breite  $\delta$ . Für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert die Fläche der Balken gegen das Integral, d. h.  $S_n \sim_{\infty} \int_a^b \varphi(t) \, dt$ .

*q. e. d.*

### 4.3 Verschiedene Approximationen der Binomialverteilung

Sei  $H_n \sim \text{Bin}(n, p)$  eine binomialverteilte Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion  $F_n$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gilt

$$F_n(t) = \Pr[H_n/n \leq t/n] \\ \rightarrow \Phi \left( \frac{t/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \right) = \Phi \left( \frac{t - np}{\sqrt{p(1-p)n}} \right).$$

Wir können  $F_n$  somit für große  $n$  durch  $\Phi$  approximieren. Diese Approximation ist in der Praxis deshalb von Bedeutung, da die Auswertung der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung für große  $n$  sehr aufwändig ist, während für die Berechnung der Normalverteilung effiziente numerische Methoden vorliegen.

## Beispiel 118

Wenn man die Wahrscheinlichkeit berechnen möchte, mit der bei  $10^6$  Würfeln mit einem idealen Würfel mehr als 500500-mal eine gerade Augenzahl fällt, so muss man eigentlich folgenden Term auswerten:

$$T := \sum_{i=5,005 \cdot 10^5}^{10^6} \binom{10^6}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10^6}.$$

Dies ist numerisch kaum effizient möglich.

Die numerische Integration der Dichte  $\varphi$  der Normalverteilung ist hingegen relativ einfach. Auch andere Approximationen der Verteilung  $\Phi$ , beispielsweise durch Polynome, sind bekannt. Entsprechende Funktionen werden in zahlreichen Softwarebibliotheken als „black box“ angeboten.

## Beispiel

*Mit der Approximation durch die Normalverteilung erhalten wir*

$$\begin{aligned} T &\approx 1 - \Phi\left(\frac{5,005 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5}{\sqrt{2,5 \cdot 10^5}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5 \cdot 10^2}{5 \cdot 10^2}\right) \\ &= 1 - \Phi(1) \approx 0,1573 . \end{aligned}$$

Bei der Approximation der Binomialverteilung mit Hilfe von Korollar 116 führt man oft noch eine so genannte **Stetigkeitskorrektur** durch. Zur Berechnung von  $\Pr[X \leq x]$  für  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  setzt man

$$\Pr[X \leq x] \approx \Phi \left( \frac{x + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

statt

$$\Pr[X \leq x] \approx \Phi \left( \frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right)$$

an.

Der Korrekturterm läßt sich in der **Histogramm-Darstellung** der Binomialverteilung veranschaulichen. Die Binomialverteilung wird dort durch Balken angegeben, deren Fläche in etwa der Fläche unterhalb der Dichte  $\varphi$  von  $\mathcal{N}(0, 1)$  entspricht. Wenn man die Fläche der Balken mit „ $X \leq x$ “ durch das Integral von  $\varphi$  approximieren möchte, so sollte man bis zum Ende des Balkens für „ $X = x$ “ integrieren und nicht nur bis zur Mitte. Dafür sorgt der Korrekturterm 0,5.

## Approximationen für die Binomialverteilung

- **Approximation durch die Poisson-Verteilung:**  $\text{Bin}(n, p)$  wird approximiert durch  $\text{Po}(np)$ . Diese Approximation funktioniert sehr gut für seltene Ereignisse, d. h. wenn  $np$  sehr klein gegenüber  $n$  ist. Als Faustregel fordert man  $n \geq 30$  und  $p \leq 0,05$ .
- **Approximation durch die Chernoff-Schranken:** Bei der Berechnung der **tails** der Binomialverteilung liefern diese Ungleichungen meist sehr gute Ergebnisse. Ihre Stärke liegt darin, dass es sich bei den Schranken nicht um Approximationen, sondern um echte Abschätzungen handelt. Dies ist vor allem dann wichtig, wenn man nicht nur numerische Näherungen erhalten möchte, sondern allgemeine Aussagen über die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen beweisen möchte.

- **Approximation durch die Normalverteilung:** Als Faustregel sagt man, dass die Verteilungsfunktion  $F_n(t)$  von  $\text{Bin}(n, p)$  durch

$$F_n(t) \approx \Phi((t - np)/\sqrt{p(1-p)n})$$

approximiert werden kann, wenn  $np \geq 5$  und  $n(1-p) \geq 5$  gilt.

# Kapitel III Induktive Statistik

## 1. Einführung

Das Ziel der **induktiven Statistik** besteht darin, aus gemessenen Zufallsgrößen auf die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten zu schließen. Im Gegensatz dazu spricht man von **deskriptiver Statistik**, wenn man sich damit beschäftigt, große Datenmengen verständlich aufzubereiten, beispielsweise durch Berechnung des Mittelwertes oder anderer abgeleiteter Größen.

## 2. Schätzvariablen

Wir betrachten die Anzahl  $X$  von Lesezugriffen auf eine Festplatte bis zum ersten Lesefehler und nehmen an, dass  $\Pr[X = i] = (1 - p)^{i-1}p$ , setzen also für  $X$  eine geometrische Verteilung an. Dahinter verbirgt sich die Annahme, dass bei jedem Zugriff **unabhängig** und mit jeweils **derselben** Wahrscheinlichkeit  $p$  ein Lesefehler auftreten kann.

Unter diesen Annahmen ist die Verteilung der Zufallsvariablen  $X$  eindeutig festgelegt. Allerdings entzieht sich der numerische Wert des Parameters  $p$  noch unserer Kenntnis. Dieser soll daher nun empirisch geschätzt werden. Statt  $p$  können wir ebensogut  $\mathbb{E}[X]$  bestimmen, da wir daraus nach den Eigenschaften der geometrischen Verteilung  $p$  mittels  $p = \frac{1}{\mathbb{E}[X]}$  berechnen können.

Dazu betrachten wir  $n$  baugleiche Platten und die zugehörigen Zufallsvariablen  $X_i$  (für  $1 \leq i \leq n$ ), d. h. wir zählen für jede Platte die Anzahl von Zugriffen bis zum ersten Lesefehler. Die Zufallsvariablen  $X_i$  sind dann unabhängig und besitzen jeweils dieselbe Verteilung wie  $X$ . Wir führen also viele Kopien eines bestimmten Zufallsexperiments aus, um Schlüsse auf die Gesetzmäßigkeiten des einzelnen Experiments ziehen zu können. Dies ist das Grundprinzip der induktiven Statistik. Die  $n$  Messungen heißen **Stichproben**, und die Variablen  $X_i$  nennt man **Stichprobenvariablen**.

## Grundprinzip statistischer Verfahren

Wir erinnern an das Gesetz der großen Zahlen (Satz 63) bzw. den Zentralen Grenzwertsatz (Satz 115). Wenn man ein Experiment genügend oft wiederholt, so nähert sich der Durchschnitt der Versuchsergebnisse immer mehr dem Verhalten an, das man „im Mittel“ erwarten würde. Je mehr Experimente wir also durchführen, umso genauere und zuverlässigere Aussagen können wir über den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum ableiten. Auf diesem Grundprinzip beruhen alle statistischen Verfahren.

Um  $\mathbb{E}[X]$  empirisch zu ermitteln, bietet es sich an, aus den Zufallsvariablen  $X_i$  das arithmetische Mittel  $\bar{X}$  zu bilden, das definiert ist durch

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Es gilt

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X].$$

$\bar{X}$  liefert uns also im Mittel den gesuchten Wert  $\mathbb{E}[X]$ . Da wir  $\bar{X}$  zur Bestimmung von  $\mathbb{E}[X]$  verwenden, nennen wir  $\bar{X}$  einen **Schätzer** für den Erwartungswert  $\mathbb{E}[X]$ . Wegen der obigen Eigenschaft ist  $\bar{X}$  sogar ein so genannter **erwartungstreuer** Schätzer.

## Definition 119

Gegeben sei eine Zufallsvariable  $X$  mit der Dichte  $f(x; \theta)$ . Eine **Schätzvariable** oder kurz **Schätzer** für den Parameter  $\theta$  der Dichte von  $X$  ist eine Zufallsvariable, die aus mehreren (meist unabhängigen und identisch verteilten) Stichprobenvariablen zusammengesetzt ist. Ein Schätzer  $U$  heißt **erwartungstreu**, wenn gilt

$$\mathbb{E}[U] = \theta.$$

### **Bemerkung:**

Die Größe  $\mathbb{E}[U - \theta]$  nennt man **Bias** der Schätzvariablen  $U$ . Bei erwartungstreuen Schätzvariablen ist der Bias gleich Null.

Der Schätzer  $\bar{X}$  ist also ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert von  $X$ . Ein wichtiges Maß für die Güte eines Schätzers ist die mittlere quadratische Abweichung, kurz **MSE** für **mean squared error** genannt. Diese berechnet sich durch  $MSE := \mathbb{E}[(U - \theta)^2]$ . Wenn  $U$  erwartungstreu ist, so folgt  $MSE = \mathbb{E}[(U - \mathbb{E}[U])^2] = \text{Var}[U]$ .

### Definition 120

Wenn die Schätzvariable  $A$  eine kleinere mittlere quadratische Abweichung besitzt als die Schätzvariable  $B$ , so sagt man, dass  $A$  **effizienter** ist als  $B$ .

Eine Schätzvariable heißt **konsistent im quadratischen Mittel**, wenn  $MSE \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt. Hierbei bezeichne  $n$  den Umfang der Stichprobe.

Für  $\bar{X}$  erhalten wir wegen der Unabhängigkeit von  $X_1, \dots, X_n$

$$\begin{aligned}MSE = \text{Var}[\bar{X}] &= \text{Var} \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] = \frac{1}{n} \text{Var}[X].\end{aligned}$$

Bei jeder Verteilung mit endlicher Varianz folgt  $MSE = \mathcal{O}(1/n)$  und somit  $MSE \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Der Schätzer  $\bar{X}$  ist also konsistent.

Aus der Konsistenz von  $\bar{X}$  im quadratischen Mittel können wir mit Hilfe des Satzes von Chebyshev (siehe Satz 61) folgende Konsequenz ableiten. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\Pr[|\bar{X} - \theta| \geq \varepsilon] = \Pr[|\bar{X} - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}[\bar{X}]}{\varepsilon^2} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Für genügend große  $n$  liegen also die Werte von  $\bar{X}$  beliebig nahe am gesuchten Wert  $\theta = \mathbb{E}[X]$ . Diese Eigenschaft nennt man auch **schwache Konsistenz**, da sie aus der Konsistenz im quadratischen Mittel folgt.

Als nächstes betrachten wir eine weitere von  $\bar{X}$  abgeleitete Schätzvariable:

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

Wir zeigen, dass  $S^2$  ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz von  $X$  ist. Sei  $\mu := \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[\bar{X}]$ .

$$\begin{aligned} (X_i - \bar{X})^2 &= (X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2 \\ &= (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X}) \\ &= (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (X_i - \mu)(X_j - \mu) \\ &= \frac{n-2}{n} (X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 - \frac{2}{n} \sum_{j \neq i} (X_i - \mu)(X_j - \mu). \end{aligned}$$

Für je zwei unabhängige Zufallsvariablen  $X_i, X_j$  mit  $i \neq j$  gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] &= \mathbb{E}[X_i - \mu] \cdot \mathbb{E}[X_j - \mu] \\ &= (\mathbb{E}[X_i] - \mu) \cdot (\mathbb{E}[X_j] - \mu) = 0 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] &= \frac{n-2}{n} \cdot \mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] + \mathbb{E}[(\mu - \bar{X})^2] \\ &= \frac{n-2}{n} \cdot \text{Var}[X_i] + \text{Var}[\bar{X}].\end{aligned}$$

Wegen  $\text{Var}[X_i] = \text{Var}[X]$  und  $\text{Var}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \text{Var}[X]$  folgt nun

$$\mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] = \frac{n-1}{n} \cdot \text{Var}[X],$$

und somit gilt für  $S^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S^2] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot n \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \text{Var}[X] = \text{Var}[X]. \end{aligned}$$

$S^2$  ist also eine erwartungstreue Schätzvariable für die Varianz von  $X$ .

Die vorangegangene Rechnung erklärt, warum man als Schätzer nicht

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \neq S^2$$

verwendet, wie man vielleicht intuitiv erwarten würde.

## Definition 121

Die Zufallsvariablen

$$\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ und } S^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

heißen **Stichprobenmittel** bzw. **Stichprobenvarianz** der Stichprobe  $X_1, \dots, X_n$ .  $\bar{X}$  und  $S^2$  sind erwartungstreue Schätzer für den Erwartungswert bzw. die Varianz.

## 2.1 Maximum-Likelihood-Prinzip zur Konstruktion von Schätzvariablen

Wir betrachten nun ein Verfahren zur Konstruktion von Schätzvariablen für Parameter von Verteilungen. Sei

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n).$$

Bei  $X_1, \dots, X_n$  handelt es sich um unabhängige Kopien der Zufallsvariablen  $X$  mit der Dichte  $f(x; \theta)$ . Hierbei sei  $\theta$  der gesuchte Parameter der Verteilung. Wir setzen

$$f(x; \theta) = \Pr[X = x],$$

wobei  $\theta$  ein Parameter der Verteilung ist.

Wenn wir den Parameter explizit angeben wollen, so schreiben wir dafür auch  $f(x; \theta) = \Pr_{\theta}[X = x]$ . Eine Stichprobe liefert für jede Variable  $X_i$  einen Wert  $x_i$ . Diese Werte fassen wir ebenfalls zu einem Vektor  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  zusammen.

Der Ausdruck

$$L(\vec{x}; \theta) := \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \Pr_{\theta}[X_i = x_i]$$
$$\stackrel{\text{unabh.}}{=} \Pr_{\theta}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$$

entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass wir die Stichprobe  $\vec{x}$  erhalten, wenn wir den Parameter mit dem Wert  $\theta$  belegen.

Wir betrachten nun eine feste Stichprobe  $\vec{x}$  und fassen  $L(\vec{x}; \theta)$  somit als Funktion von  $\theta$  auf. In diesem Fall nennen wir  $L$  die **Likelihood-Funktion** der Stichprobe.

Es erscheint sinnvoll, zu einer gegebenen Stichprobe  $\vec{x}$  den Parameter  $\theta$  so zu wählen, dass  $L(x; \theta)$  **maximal** wird.

### Definition 122

Ein Schätzwert  $\hat{\theta}$  für den Parameter einer Verteilung  $f(x; \theta)$  heißt

**Maximum-Likelihood-Schätzwert** (ML-Schätzwert) für eine Stichprobe  $\vec{x}$ , wenn gilt

$$L(\vec{x}; \theta) \leq L(\vec{x}; \hat{\theta}) \text{ für alle } \theta.$$

## Beispiel 123

Wir konstruieren mit der ML-Methode einen Schätzer für den Parameter  $p$  der Bernoulli-Verteilung. Es gilt  $\Pr_p[X_i = 1] = p$  und  $\Pr_p[X_i = 0] = 1 - p$ . Daraus schließen wir, dass  $\Pr_p[X_i = x_i] = p^{x_i}(1 - p)^{1-x_i}$ , und stellen die Likelihood-Funktion

$$L(\vec{x}; p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} \cdot (1 - p)^{1-x_i}$$

auf.

Wir suchen als Schätzer für  $p$  den Wert, an dem die Funktion  $L$  maximal wird. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \ln L(\vec{x}; p) &= \sum_{i=1}^n (x_i \cdot \ln p + (1 - x_i) \cdot \ln(1 - p)) \\ &= n\bar{x} \cdot \ln p + (n - n\bar{x}) \cdot \ln(1 - p). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $\bar{x}$  das arithmetische Mittel  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

## Beispiel (Forts.)

*Wir finden das Maximum durch Nullsetzen der Ableitung:*

$$\frac{d \ln L(\vec{x}; p)}{dp} = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n - n\bar{x}}{1 - p} = 0.$$

*Diese Gleichung hat die Lösung  $p = \bar{x}$ .*

## Beispiel 124

Die Zufallsvariable  $X$  sei  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt, und wir suchen Schätzvariablen für die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$ . Nach Definition der Likelihood-Funktion gilt

$$L(\vec{x}; \mu, \sigma^2) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left( -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

Durch Logarithmieren erhalten wir

$$\ln L(\vec{x}; \mu, \sigma^2) = -n(\ln \sqrt{2\pi} + \ln \sigma) + \sum_{i=1}^n \left( -\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

## Beispiel 124

Für die Nullstellen der Ableitungen ergibt sich

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu}{\sigma^2} \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^3} \stackrel{!}{=} 0,$$

also

$$\mu = \bar{x} \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2.$$

Wir haben also durch die ML-Methode „fast“ das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz erhalten. Allerdings besitzt der Schätzer für die Varianz hier den Vorfaktor  $\frac{1}{n}$  statt  $\frac{1}{n-1}$ . Die ML-Schätzvariable für die Varianz ist somit nicht erwartungstreu.

### 3. Konfidenzintervalle

Bei der Verwendung von Schätzvariablen geht man davon aus, dass der erhaltene Schätzwert „nahe“ beim gesuchten Parameter  $\theta$  liegt. Die Schätzungen werden „besser“, je größer die betrachtete Stichprobe ist. Diese Angaben sind aus quantitativer Sicht natürlich unbefriedigend, da nicht erkennbar ist, wie gut man sich auf den Schätzwert verlassen kann.

Die Lösung dieses Problems besteht darin, statt einer Schätzvariablen  $U$  zwei Schätzer  $U_1$  und  $U_2$  zu betrachten.  $U_1$  und  $U_2$  werden so gewählt, dass

$$\Pr[U_1 \leq \theta \leq U_2] \geq 1 - \alpha.$$

Die Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  heißt **Konfidenzniveau** und kann dem „Sicherheitsbedürfnis“ angepasst werden.

Wenn wir für eine konkrete Stichprobe die Schätzer  $U_1$  und  $U_2$  berechnen und davon ausgehen, dass  $\theta \in [U_1, U_2]$  ist, so ziehen wir höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  einen falschen Schluss.  $[U_1, U_2]$  heißt **Konfidenzintervall**.

In vielen Fällen verwendet man nur eine Schätzvariable  $U$  und konstruiert mittels  $U_1 := U - \delta$  und  $U_2 := U + \delta$  ein symmetrisches Konfidenzintervall  $[U - \delta, U + \delta]$ .

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable, und seien  $X_1, \dots, X_n$   $n$  zugehörige Stichprobenvariablen. Gemäß der Additivität der Normalverteilung (siehe Satz 113) ist das Stichprobenmittel  $\bar{X}$  ebenfalls normalverteilt mit  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ . Wir suchen für  $\bar{X}$  ein symmetrisches Konfidenzintervall.

Nach Satz 100 ist

$$Z := \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt.

Für  $Z$  betrachten wir das Konfidenzintervall  $[-c, c]$  für ein geeignetes  $c > 0$  und setzen

$$\Pr[-c \leq Z \leq c] \stackrel{!}{=} 1 - \alpha.$$

Auflösen nach  $\mu$  ergibt

$$\Pr \left[ \bar{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \right] \stackrel{!}{=} 1 - \alpha.$$

Das gesuchte Konfidenzintervall lautet also

$$K = \left[ \bar{X} - \frac{c\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{c\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Den Parameter  $c$  wählen wir wie folgt:

$$\Pr[-c \leq Z \leq c] = \Phi(c) - \Phi(-c) \stackrel{!}{=} 1 - \alpha.$$

Wegen der Symmetrie von  $\Phi$  gilt  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$  und wir erhalten

$$\Phi(c) - \Phi(-c) = 2 \cdot \Phi(c) - 1 \stackrel{!}{=} 1 - \alpha \iff \Phi(c) = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

also

$$c = \Phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right).$$

## Definition 125

$X$  sei eine stetige Zufallsvariable mit Verteilung  $F_X$ . Eine Zahl  $x_\gamma$  mit

$$F_X(x_\gamma) = \gamma$$

heißt  $\gamma$ -Quantil von  $X$  bzw. der Verteilung  $F_X$ .

## Definition 126

Für die Standardnormalverteilung bezeichnet  $z_\gamma$  das  $\gamma$ -Quantil.

Damit können wir das gesuchte Konfidenzintervall angeben durch

$$K = \left[ \bar{X} - \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{z_{(1-\frac{\alpha}{2})}\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

## 4. Testen von Hypothesen

### 4.1 Einführung

Bislang haben wir versucht, Parameter von Verteilungen zu schätzen. In der Praxis ist man jedoch oft an der eigentlichen Kenntnis dieser Parameter gar nicht interessiert, sondern man möchte gewisse, damit zusammenhängende Behauptungen überprüfen.

Im Folgenden stellen wir die Bestandteile eines statistischen Tests anhand eines abstrakten Beispiels vor. Wir betrachten dazu eine Zufallsvariable  $X$  mit  $\Pr[X = 1] = p$  und  $\Pr[X = 0] = 1 - p$ . Durch einen Test soll überprüft werden, ob  $p < 1/3$  oder  $p \geq 1/3$  gilt.

## Definition eines Tests

Wir betrachten eine Stichprobe von  $n$  unabhängigen Stichprobenvariablen  $X_1, \dots, X_n$ , die dieselbe Verteilung wie die Zufallsvariable  $X$  besitzen. Zu einem zugehörigen Stichprobenvektor  $\vec{x}$  müssen wir nun die Frage beantworten, ob wir für diesen Versuchsausgang die Hypothese „ $p \geq 1/3$ “ annehmen oder ablehnen.

Sei

$$K := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; \vec{x} \text{ führt zur Ablehnung der Hypothese}\}.$$

$K$  nennen wir den **Ablehnungsbereich** oder den **kritischen Bereich** des Tests.

Gewöhnlich wird  $K$  konstruiert, indem man die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  zu einer neuen Variablen  $T$ , der so genannten **Testgröße**, zusammenfasst. Dann unterteilt man den Wertebereich  $\mathbb{R}$  von  $T$  in mehrere Bereiche, die entweder zur Ablehnung der Hypothese führen sollen oder nicht. Dabei betrachtet man meist ein einzelnes halboffenes oder abgeschlossenes Intervall und spricht dann von einem **einseitigen** bzw. von einem **zweiseitigen** Test.

Die Menge  $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}$  enthalte die Werte von  $T$ , die zur Ablehnung der Hypothese führen sollen. Da wir Tests immer über eine Testgröße definieren, werden wir der Einfachheit halber auch  $\tilde{K}$  als Ablehnungsbereich bezeichnen.  $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}$  entspricht direkt dem Ablehnungsbereich  $K = T^{-1}(\tilde{K}) \subseteq \mathbb{R}^n$ , wie wir ihn oben festgelegt haben.

Die zu überprüfende Hypothese bezeichnen wir mit  $H_0$  und sprechen deshalb auch von der **Nullhypothese**. Bei manchen Tests formuliert man noch eine zweite Hypothese  $H_1$ , die so genannte **Alternative**. Im Beispiel können wir

$$H_0 : p \geq 1/3 \text{ und } H_1 : p < 1/3$$

setzen.

Manchmal verzichtet man darauf,  $H_1$  anzugeben. Dann besteht die Alternative wie oben einfach darin, dass  $H_0$  nicht gilt. In diesem Fall nennen wir  $H_1$  **triviale Alternative**.

Ein echter, also nicht-trivialer Alternativtest läge beispielsweise vor, wenn wir ansetzen

$$H_0' : p \geq 1/3 \text{ und } H_1' : p \leq 1/6.$$

### Beispiel 127

Wir untersuchen eine Festplatte, von der bekannt ist, dass sie zu einer von zwei Baureihen gehört. Die mittleren Zugriffszeiten dieser Baureihen betragen 9ms bzw. 12ms. Wir möchten nun herausfinden, zu welchem Typ die betrachtete Festplatte gehört, indem wir die Zugriffszeit bei  $n$  Zugriffen bestimmen. Hier würde man dann ansetzen:  $H_0 : \mu \leq 9$  und  $H_1 := \mu \geq 12$ , wobei  $\mu$  die mittlere Zugriffszeit bezeichnet.

## Fehler bei statistischen Tests

Bei jedem statistischen Test können mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit falsche Schlüsse gezogen werden. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn  $H_0$  gilt, aber das Ergebnis  $\vec{x}$  der Stichprobe im Ablehnungsbereich  $K$  liegt.

Dann spricht man von einem Fehler 1. Art.

Analog erhalten wir einen Fehler 2. Art, wenn  $H_0$  nicht gilt und  $\vec{x}$  nicht im Ablehnungsbereich liegt.

Fehler 1. Art :  $H_0$  gilt, wird aber abgelehnt.

Fehler 2. Art :  $H_0$  gilt nicht, wird aber angenommen.

Für die Beurteilung eines Tests ist es wesentlich, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese beiden Fehler eintreten können. Ziel ist es natürlich, diese Wahrscheinlichkeiten möglichst klein zu halten. Allerdings sind die Minimierung des Fehlers 1. Art und des Fehlers 2. Art gegenläufige Ziele, so dass ein vernünftiger Ausgleich zwischen beiden Fehlern gefunden werden muss. Wenn man beispielsweise  $K = \emptyset$  setzt, so erhält man Wahrscheinlichkeit Null für den Fehler 1. Art, da  $H_0$  immer angenommen wird. Allerdings tritt der Fehler 2. Art dann mit Wahrscheinlichkeit Eins ein, wenn  $H_0$  nicht gilt.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art wird mit  $\alpha$  bezeichnet, und man spricht deshalb gelegentlich vom  $\alpha$ -Fehler.  $\alpha$  heißt auch **Signifikanzniveau** des Tests.

In der Praxis ist es üblich, sich ein Signifikanzniveau  $\alpha$  vorzugeben (übliche Werte hierfür sind 0,05, 0,01 oder 0,001) und dann den Test so auszulegen (also den Ablehnungsbereich  $K$  so zu bestimmen), dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art den Wert  $\alpha$  besitzt.

## Konstruktion eines einfachen Tests

Wir konstruieren einen Test für den Parameter  $p$  einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen  $X$ . Wir setzen

$$H_0 : p \geq p_0, \quad H_1 : p < p_0.$$

Als Testgröße verwenden wir

$$T := X_1 + \dots + X_n.$$

Für größere Wahrscheinlichkeiten  $p$  erwarten wir auch größere Werte für  $T$ . Deshalb ist es sinnvoll, einen Ablehnungsbereich der Art  $K := [0, k]$  für  $T$  zu wählen, wobei  $k \in \mathbb{R}$  geeignet festzulegen ist. Wir konstruieren hier also einen einseitigen Test, während für eine Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  sowohl zu kleine als auch zu große Werte von  $T$  zur Ablehnung von  $H_0$  führen sollten und somit ein zweiseitiger Test vorzuziehen wäre.

$T$  ist binomialverteilt. Da wir von einem großen Stichprobenumfang  $n$  ausgehen, bietet es sich an, die Verteilung von  $T$  nach dem Grenzwertsatz von de Moivre (siehe Korollar 116) durch die Normalverteilung zu approximieren.

Sei

$$\tilde{T} := \frac{T - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

$\tilde{T}$  ist annähernd standardnormalverteilt.

Wir berechnen für jeden Wert von  $k$  das zugehörige Signifikanzniveau  $\alpha$  des Tests.

$$\begin{aligned}\text{Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art} &= \max_{p \in H_0} \Pr_p[T \in K] \\ &= \max_{p \in H_0} \Pr_p[T \leq k]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art} &= \sup_{p \in H_1} \Pr_p[T \notin K] \\ &= \sup_{p \in H_1} \Pr_p[T > k]\end{aligned}$$

Für den Fehler 1. Art  $\alpha$  erhalten wir

$$\begin{aligned}\alpha &= \max_{p \geq p_0} \Pr_p [T \leq k] = \Pr_{p=p_0} [T \leq k] \\ &= \Pr_{p=p_0} \left[ \tilde{T} \leq \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right] \\ &= \Pr \left[ \tilde{T} \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right] \approx \Phi \left( \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \right).\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Quantile der Standardnormalverteilung ergibt sich damit:

- Ist  $k$  so gewählt, dass  $(k - np_0)/\sqrt{np_0(1 - p_0)} = z_\alpha$ , so ist das Signifikanzniveau gleich  $\alpha$ .
- Ist das gewünschte Signifikanzniveau  $\alpha$  des Tests vorgegeben, so erhält man den Wert  $k = k(n)$  in Abhängigkeit vom Umfang  $n$  der Stichprobe durch

$$k = z_\alpha \cdot \sqrt{np_0(1 - p_0)} + np_0. \quad (8)$$

Kleinere Werte für  $k$  verkleinern zwar den Fehler 1. Art, vergrößern jedoch den Annahmehereich und damit die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

## Verhalten der Testfehler

Wie verhalten sich die möglichen Testfehler des konstruierten Verfahrens? Was geschieht beispielsweise, wenn  $p$  nur geringfügig kleiner als  $p_0$  ist?

In diesem Fall betrachten wir beim Fehler 2. Art die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr_{p=p_0-\varepsilon}[T \geq k] \approx \Pr_{p=p_0}[T \geq k] \approx 1 - \alpha .$$

Wenn sich also die „wahren“ Verhältnisse nur minimal von unserer Nullhypothese unterscheiden, so werden wir diese „im Zweifelsfall“ annehmen.

Bei echten **Alternativtests** werden für hinreichend große Stichproben und einen geeignet eingestellten Ablehnungsbereich beide Testfehler klein.

### Beispiel 128

Die Abbruchrate  $p$  der Transaktionen in einem Online-Datenbanksystem wurde bereits früher einmal ermittelt. Allerdings sind die entsprechenden Daten verloren gegangen und die Entwickler erinnern sich nur noch, dass das Ergebnis entweder  $p = 1/3$  oder  $p = 1/6$  lautete. Unter dieser Annahme würde man den Test wie folgt ansetzen:

$$H_0 : p \geq 1/3, \quad H'_1 : p \leq 1/6.$$

## Beispiel (Forts.)

Für den Fehler 2. Art erhält man nun:

$$\begin{aligned} \text{Fehlerwahrsch. 2. Art} &= \max_{p \leq 1/6} \Pr_p[T > k] \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{k - (1/6) \cdot n}{\sqrt{(1/6) \cdot (5/6)n}}\right). \end{aligned}$$

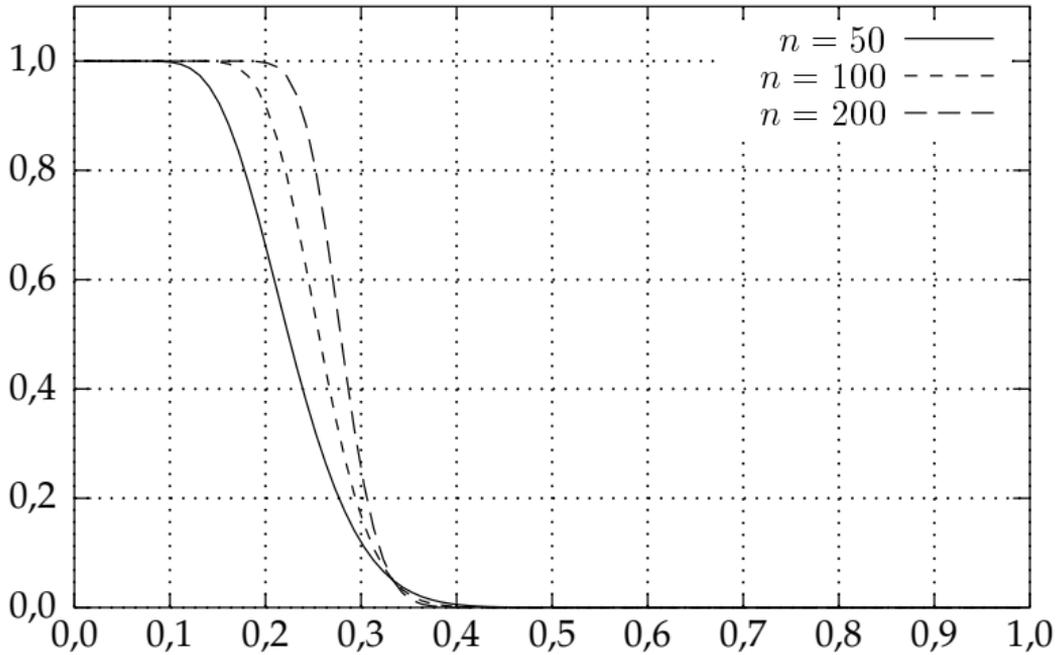
Mit den obigen Werten  $k = 25$  und  $n = 100$  ergibt sich mit

$$\Phi\left(\frac{150 - 100}{\sqrt{5} \cdot 10}\right) = \Phi(\sqrt{5}) \approx 0,9871$$

ein Fehler 2. Art der Größe 0,0129, während sich für die *triviale Alternative*  $H_1 : p < 1/3$  ein Wert von etwa 0,95 ergibt.

Die so genannte **Gütefunktion**  $g$  gibt allgemein die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Test die Nullhypothese verwirft. Für unser hier entworfenes Testverfahren gilt

$$g(n, p) = \Pr_p[T \in K] = \Pr_p[T \leq k] \approx \Phi \left( \frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right).$$



Gütefunktion  $g(n, p)$  für verschiedene Werte von  $n$

Man erkennt deutlich, dass für alle  $n$  der Wert von  $k = k(n)$  genau so gewählt wurde, dass  $g(n, 1/3) = 0,05$  gilt. Dies wird durch den in Gleichung 8 angegebenen Ausdruck erreicht.

Für Werte von  $p$  größer als  $1/3$  wird  $H_0 : p \geq 1/3$  mit hoher Wahrscheinlichkeit angenommen, während für Werte deutlich unter  $1/3$  die Hypothese  $H_0$  ziemlich sicher abgelehnt wird.

Ferner ist auffällig, dass  $g$  für größere Werte von  $n$  schneller von Eins auf Null fällt. Daran erkennt man, dass durch den Test die Fälle „ $H_0$  gilt“ und „ $H_0$  gilt nicht“ umso besser unterschieden werden können, je mehr Stichproben durchgeführt werden. Für Werte von  $p$ , bei denen  $g(n, p)$  weder nahe bei Eins noch nahe bei Null liegt, kann der Test nicht sicher entscheiden, ob die Nullhypothese abzulehnen ist.

## 4.2 Praktische Anwendung statistischer Tests

Das im vorhergehenden Abschnitt konstruierte Testverfahren taucht in der Literatur unter dem Namen **approximativer Binomialtest** auf.

Die folgende Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Eckdaten dieses Tests.

### Tabelle: Approximativer Binomialtest

#### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $\Pr[X_i = 1] = p$  und  $\Pr[X_i = 0] = 1 - p$ , wobei  $p$  unbekannt sei.  $n$  sei hinreichend groß, so dass die Approximation aus Korollar 116 brauchbare Ergebnisse liefert.

#### Hypothesen:

- a)  $H_0 : p = p_0$  gegen  $H_1 : p \neq p_0$ ,
- b)  $H_0 : p \geq p_0$  gegen  $H_1 : p < p_0$ ,
- c)  $H_0 : p \leq p_0$  gegen  $H_1 : p > p_0$ .

#### Testgröße:

$$Z := \frac{h - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}},$$

wobei  $h := X_1 + \dots + X_n$  die Häufigkeit bezeichnet, mit der die Ereignisse  $X_i = 1$  aufgetreten sind.

#### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ ,
- b)  $Z < z_\alpha$ ,
- c)  $Z > z_{1-\alpha}$ .

## 4.3 Allgemeines Vorgehen bei statistischen Tests

1. **Schritt:** Formulierung von Annahmen. Ganz ohne Annahmen kommt man meist nicht aus. Übliche Annahmen betreffen meist die Verteilung der Stichprobenvariablen und deren Unabhängigkeit.
2. **Schritt:** Formulierung der Nullhypothese.
3. **Schritt:** Auswahl des Testverfahrens.
4. **Schritt:** Durchführung des Tests und Entscheidung.

## 4.4 Ausgewählte statistische Tests

### 4.4.1 Wie findet man das richtige Testverfahren?

Statistische Tests kann man nach mehreren Kriterien in Klassen einteilen.

- **Anzahl der beteiligten Zufallsgrößen**

Sollen zwei Zufallsgrößen mit potentiell unterschiedlichen Verteilungen verglichen werden, für die jeweils eine Stichprobe erzeugt wird (**Zwei-Stichproben-Test**), oder wird nur eine einzelne Zufallsgröße untersucht (**Ein-Stichproben-Test**)?

Bei der Fragestellung

*Beträgt die mittlere Zugriffszeit auf einen Datenbankserver im Mittel höchstens 10ms?*

hat man es mit einem Ein-Stichproben-Test zu tun, während die Untersuchung der Frage

*Hat Datenbankserver A eine kürzere mittlere Zugriffszeit als Datenbankserver B?*

auf einen Zwei-Stichproben-Test führt.

Bei mehreren beteiligten Zufallsgrößen wird zusätzlich unterschieden, ob aus voneinander unabhängigen Grundmengen Stichproben erhoben werden oder nicht. Beim vorigen Beispiel werden **unabhängige Messungen** vorgenommen, sofern die Server A und B getrennt voneinander arbeiten. Wenn man jedoch die Frage

*Läuft ein Datenbankserver auf einer Menge festgelegter Testanfragen mit Query-Optimierung schneller als ohne?*

untersucht, so spricht man von **verbundenen Messungen**.

Gelegentlich betrachtet man auch den Zusammenhang zwischen mehreren Zufallsgrößen. Beispielsweise könnte man sich für die Frage interessieren:

*Wie stark wächst der Zeitbedarf für eine Datenbankanfrage im Mittel mit der (syntaktischen) Länge der Anfrage, d. h. führen kompliziertere Formulierungen zu proportional längeren Laufzeiten?*

Mit solchen Fragenstellungen, bei denen ein funktionaler Zusammenhang zwischen Zufallsgrößen ermittelt werden soll, beschäftigt sich die [Regressionsanalyse](#). Wenn überhaupt erst zu klären ist, ob ein solcher Zusammenhang besteht oder ob die Zufallsgrößen vielmehr unabhängig voneinander sind, so spricht man von [Zusammenhangsanalyse](#).

- **Formulierung der Nullhypothese**

Welche Größe dient zur Definition der Nullhypothese? Hierbei werden in erster Linie Tests unterschieden, die Aussagen über verschiedene so genannte **Lageparameter** treffen, wie z.B. den **Erwartungswert** oder die **Varianz** der zugrunde liegenden Verteilungen.

Im Zwei-Stichproben-Fall könnte man beispielsweise untersuchen, ob der Erwartungswert der Zufallsgröße  $A$  größer oder kleiner als bei Zufallsgröße  $B$  ist.

Gelegentlich wird zur Formulierung der Nullhypothese auch der so genannte **Median** betrachtet: Der Median einer Verteilung entspricht dem (kleinsten) Wert  $x$  mit  $F(x) = 1/2$ .

Neben solchen Tests auf Lageparameter gibt es z.B. auch Tests, die auf eine **vorgegebene Verteilung** oder auf ein Maß für die Abhängigkeit verschiedener Zufallsgrößen testen.

- **Annahmen über die Zufallsgrößen**

Was ist über die Verteilung der untersuchten Größe(n) bekannt? Bei entsprechenden Annahmen könnte es sich z.B. um die Art der Verteilung, den Erwartungswert oder die Varianz handeln.

## 4.4.2 Ein-Stichproben-Tests für Lageparameter

Beim approximativen Binomialtest wird ausgenutzt, dass die Binomialverteilung für große  $n$  nach dem Grenzwertsatz von de Moivre (Korollar 116) gegen die Normalverteilung konvergiert. Aus diesem Grund kann man diesen Test auch als Spezialfall eines allgemeineren Testverfahrens ansehen, nämlich des **Gaußtest**, der nun dargestellt wird.

## Tabelle: Gaußtest

### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , wobei  $\sigma^2$  bekannt ist.  
Alternativ gelte  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ , und  $n$  sei groß genug.

### Hypothesen:

- a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ,
- b)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$ ,
- c)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

### Testgröße:

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}.$$

### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|Z| > z_{1-\alpha/2}$ ,
- b)  $Z < z_\alpha$ ,
- c)  $Z > z_{1-\alpha}$ .

Der Gaußtest hat den Nachteil, dass man die Varianz  $\sigma^2$  der beteiligten Zufallsgrößen kennen muss.

Wenn diese unbekannt ist, so liegt es nahe, die Varianz durch die Stichprobenvarianz  $S^2$  (siehe Definition 121) anzunähern. Dies führt auf den so genannten  $t$ -Test, der in der folgenden Übersicht dargestellt ist.

## Tabelle: *t*-Test

### Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .  
Alternativ gelte  $\mathbb{E}[X_i] = \mu$  und  $\text{Var}[X_i] = \sigma^2$ , und  $n$  sei groß genug.

### Hypothesen:

- a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ,
- b)  $H_0 : \mu \geq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu < \mu_0$ ,
- c)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  gegen  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

### Testgröße:

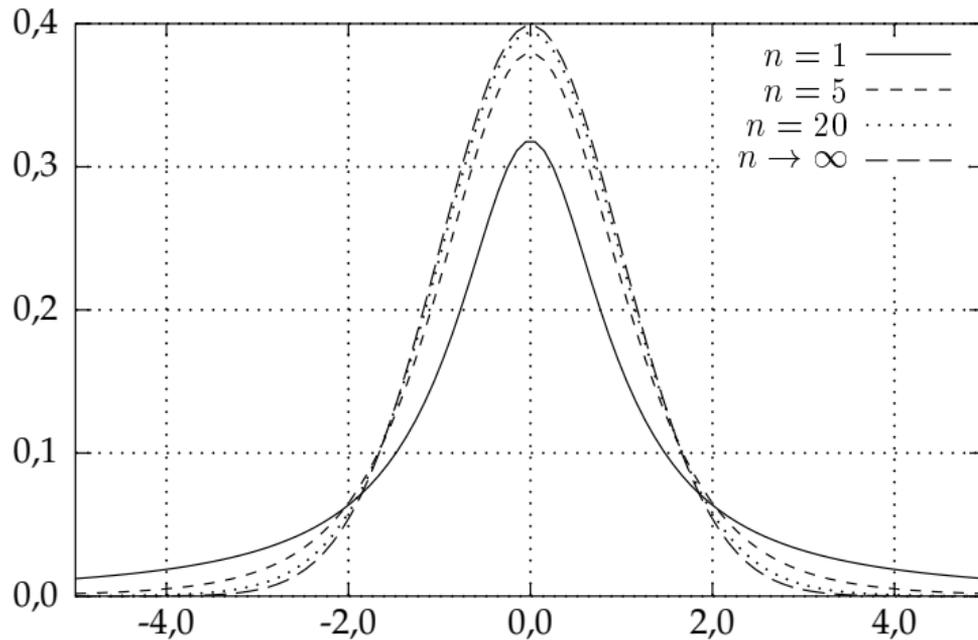
$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S} \sqrt{n}.$$

### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|T| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$ ,
- b)  $T < t_{n-1, \alpha}$ ,
- c)  $T > t_{n-1, 1-\alpha}$ .

Hierbei gibt  $t_{n-1,1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der *t-Verteilung* mit  $n - 1$  Freiheitsgraden an. Die *t-Verteilung* taucht manchmal auch unter dem Namen *Student-Verteilung* auf, da sie ursprünglich unter dem Pseudonym „Student“ publiziert wurde.

Wir gehen an dieser Stelle nicht darauf ein, wieso die Testgröße die *t-Verteilung* besitzt, sondern weisen nur darauf hin, dass die Dichte dieser Verteilung (eigentlich handelt es sich um eine ganze Familie von Verteilungen, da die Anzahl der Freiheitsgrade jeweils noch gewählt werden kann) der Dichte der Normalverteilung ähnelt. Für große  $n$  (Faustregel:  $n \geq 30$ ) liegen die beiden Dichten so genau übereinander, dass man in der Praxis die *t-Verteilung* durch die Normalverteilung annähert.



Dichte der  $t$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden

Als weitere Beispiele für gängige Ein-Stichproben-Tests zu Lageparametern seien der **Wilcoxon-Test** und der  $\chi^2$ -**Varianztest** genannt. Ersterer dient zum Testen von Hypothesen zum Median, während der zweite Test Hypothesen zur Varianz beinhaltet.

### 4.4.3 Zwei-Stichproben-Tests für Lageparameter

Bei Zwei-Stichproben-Tests wollen wir das Verhältnis von Lageparametern untersuchen. Besonders wichtig sind hierbei Tests zum Erwartungswert. Für zwei Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  könnten wir beispielsweise die Frage untersuchen, ob für die Erwartungswerte  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  gilt, dass  $\mu_X = \mu_Y$  ist.

## Tabelle: Zwei-Stichproben-t-Test

### Annahmen:

$X_1, \dots, X_m$  und  $Y_1, \dots, Y_n$  seien unabhängig und jeweils identisch verteilt, wobei  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$  und  $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  gelte. Die Varianzen seien identisch, also  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ .

### Hypothesen:

- a)  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  gegen  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ ,
- b)  $H_0 : \mu_X \geq \mu_Y$  gegen  $H_1 : \mu_X < \mu_Y$ ,
- c)  $H_0 : \mu_X \leq \mu_Y$  gegen  $H_1 : \mu_X > \mu_Y$ .

### Testgröße:

$$T := \sqrt{\frac{n+m-2}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(m-1) \cdot S_X^2 + (n-1) \cdot S_Y^2}}.$$

### Ablehnungskriterium für $H_0$ bei Signifikanzniveau $\alpha$ :

- a)  $|T| > t_{m+n-2, 1-\alpha/2}$ ,
- b)  $T < t_{m+n-2, \alpha}$ ,
- c)  $T > t_{m+n-2, 1-\alpha}$ .

Vom Zwei-Stichproben- $t$ -Test findet man in der Literatur noch zusätzliche Varianten, die auch dann einsetzbar sind, wenn die beteiligten Zufallsgrößen nicht dieselbe Varianz besitzen. Der beim Ein-Stichproben-Fall erwähnte Wilcoxon-Test kann ebenfalls auf den Zwei-Stichproben-Fall übertragen werden.

#### 4.4.4 Nicht an Lageparametern orientierte Tests

Wir betrachten in diesem Abschnitt exemplarisch den  $\chi^2$ -Anpassungstest. Bei einem Anpassungstest wird nicht nur der Lageparameter einer Verteilung getestet, sondern es wird die Verteilung als Ganzes untersucht.

Beim approximativen Binomialtest (siehe Tabelle 1) haben wir streng genommen bereits einen Anpassungstest durchgeführt. Bei der Nullhypothese  $H_0 : p = p_0$  wird untersucht, ob es sich bei der betrachteten Zufallsgröße um eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Parameter  $p_0$  handelt. Beim  $\chi^2$ -Test gehen wir nun einen Schritt weiter: Wir nehmen an, dass die Zufallsgröße  $X$  genau  $k$  verschiedene Werte annimmt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $W_X = \{1, \dots, k\}$ . Die Nullhypothese lautet nun

$$H_0 : \Pr[X = i] = p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Tabelle:  $\chi^2$ -Anpassungstest

Annahmen:

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und identisch verteilt mit  $W_{X_i} = \{1, \dots, k\}$ .

Hypothesen:

$$H_0 : \Pr[X = i] = p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k,$$

$$H_1 : \Pr[X = i] \neq p_i \quad \text{für mindestens ein } i \in \{1, \dots, k\},$$

Testgröße:

$$T = \sum_{i=1}^k \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i},$$

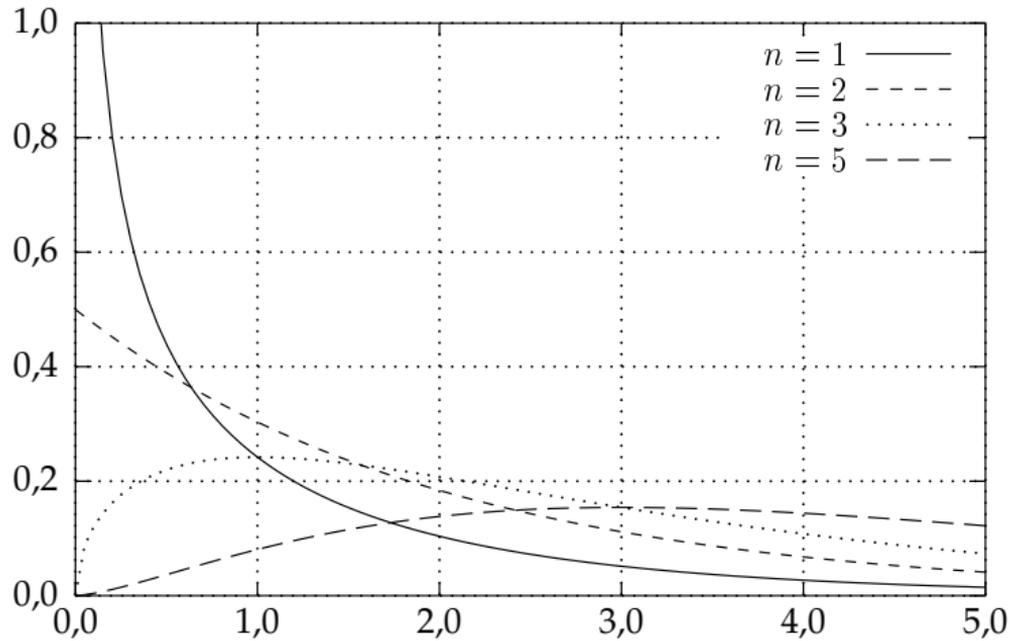
wobei  $h_i$  die Häufigkeit angibt, mit der  $X_1, \dots, X_n$  den Wert  $i$  angenommen haben.

Ablehnungskriterium für  $H_0$  bei Signifikanzniveau  $\alpha$ :

$$T > \chi_{k-1, 1-\alpha}^2;$$

dabei sollte gelten, dass  $np_i \geq 1$  für alle  $i$  und  $np_i \geq 5$  für mindestens 80% der Werte  $i = 1, \dots, k$ .

Für die Testgröße  $T$  wird näherungsweise eine  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k - 1$  Freiheitsgraden angenommen. Die Werte dieser Verteilung finden sich in entsprechenden Tabellen in der Literatur. Damit diese Approximation gerechtfertigt ist, sollte gelten, dass  $np_i \geq 1$  für alle  $i$  und  $np_i \geq 5$  für mindestens 80% der Werte  $i = 1, \dots, k$ . Das  $\gamma$ -Quantil einer  $\chi^2$ -Verteilung mit  $k$  Freiheitsgraden bezeichnen wir mit  $\chi_{k,\gamma}^2$ .



Dichte der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden

## Beispiel 129

Als Anwendung für den  $\chi^2$ -Test wollen wir überprüfen, ob der Zufallszahlengenerator von Maple eine gute Approximation der Gleichverteilung liefert. Dazu lassen wir Maple  $n = 100000$  Zufallszahlen aus der Menge  $\{1, \dots, 10\}$  generieren. Wir erwarten, dass jede dieser Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit  $p_1 = \dots = p_{10} = 1/10$  auftritt. Dies sei unsere Nullhypothese, die wir mit einem Signifikanzniveau von  $\alpha = 0,05$  testen wollen.

Beispiel:

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_i$	10102	10070	9972	9803	10002	10065	10133	9943	10009	9901

Für den Wert der Testgröße gilt  $T = 8,9946$ . Ferner erhalten wir  $\chi_{9,0,95}^2 \approx 16,919$ . Der Test liefert also keinen Grund, die Nullhypothese abzulehnen.

Das Prinzip des  $\chi^2$ -Anpassungstests kann in leicht abgewandelter Form auch noch zum Testen einiger anderer Hypothesen verwendet werden: Beim  $\chi^2$ -Homogenitätstest wird überprüft, ob zwei oder mehrere Verteilungen identisch sind, während beim  $\chi^2$ -Unabhängigkeitstest zwei Zufallsgrößen auf Unabhängigkeit untersucht werden. Beschreibungen dieser Tests findet man in der Literatur.

# Kapitel IV Stochastische Prozesse

## 1. Einführung

Wir betrachten zeitliche Folgen von Zufallsexperimenten. Mathematisch beschreibt man diese durch einen so genannten **stochastischen Prozess**. Darunter versteht man eine Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in T}$ , die das Verhalten des Systems zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  angeben.

Wenn wir  $T = \mathbb{N}_0$  annehmen, sprechen wir von einem stochastischen Prozess mit diskreter Zeit. Lässt man andererseits  $T = \mathbb{R}_0^+$  zu, so spricht man von stochastischen Prozessen mit kontinuierlicher Zeit.

Eine besonders einfache Art von stochastischen Prozessen sind so genannte **Markov-Ketten**. Diese haben die Eigenschaft, dass der nächste Zustand des Prozesses zwar vom aktuellen Zustand abhängen darf, nicht aber von der Historie, d.h. davon, wie der aktuelle Zustand erreicht wurde.

## 2. Prozesse mit diskreter Zeit

### 2.1 Einführung

#### Definition 130

Eine (endliche) Markov-Kette (mit diskreter Zeit) über der Zustandsmenge  $S = \{0, \dots, n-1\}$  besteht aus einer unendlichen Folge von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  mit Wertemenge  $S$  sowie einer Startverteilung  $q_0$  mit  $q_0^T \in \mathbb{R}^n$ . Die Komponenten von  $q_0$  sind hierbei  $\geq 0$  und addieren sich zu 1. Für jede Indexmenge  $I \subseteq \{0, \dots, t-1\}$  und beliebige Zustände  $i, j, s_k$  ( $k \in I$ ) gilt

$$\Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i, \forall k \in I : X_k = s_k] = \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]. \quad (9)$$

Sind die Werte

$$p_{ij} := \Pr[X_{t+1} = j \mid X_t = i]$$

von  $t$  unabhängig, so nennt man die Markov-Kette **(zeit)homogen**. In diesem Fall definiert man die **Übergangsmatrix** durch  $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j < n}$ . Wenn man  $S = \mathbb{N}_0$  zulässt, so spricht man von einer **unendlichen Markov-Kette**.

Markov-Ketten sind nach **Andrey Andreyevich Markov** (1856–1922) benannt.

Bedingung (9) heißt **Markov-Bedingung** und besagt:

Wenn wir den Zustand  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  kennen, so hängt die Übergangswahrscheinlichkeit zum Folgezustand  $j$  nur von  $i$  und  $j$  ab. Die Vergangenheit (Zustände zu Zeitpunkten  $< t$ ) der Markov-Kette spielt keine Rolle. Das „Gedächtnis“ der Markov-Kette besteht also nur aus ihrem aktuellen Zustand und sie „weiß“ nicht, wie sie dorthin gekommen ist.

Bei einer zeithomogenen Markov-Kette hat die (absolute) Zeit  $t$  keinen Einfluss auf die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_{ij}$ , d.h. das Systemverhalten wird nur durch den aktuellen Zustand bestimmt und nicht durch eine absolute Uhr.

## Wahrscheinlichkeitsraum einer Markov-Kette

Nehmen wir an, dass wir die Kette von der Zeit 0 bis zur Zeit  $t_0$  beobachten wollen. Wir bezeichnen die Folge von Zuständen, die von der Kette in dieser Zeit durchlaufen wurde, mit  $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{t_0})$ .  $\Omega \subseteq S^{t_0+1}$  sei die Menge möglicher Zustandsfolgen. Einer beliebigen Folge  $\omega := (x_0, x_1, \dots, x_{t_0}) \in \Omega$  ordnen wir die Wahrscheinlichkeit

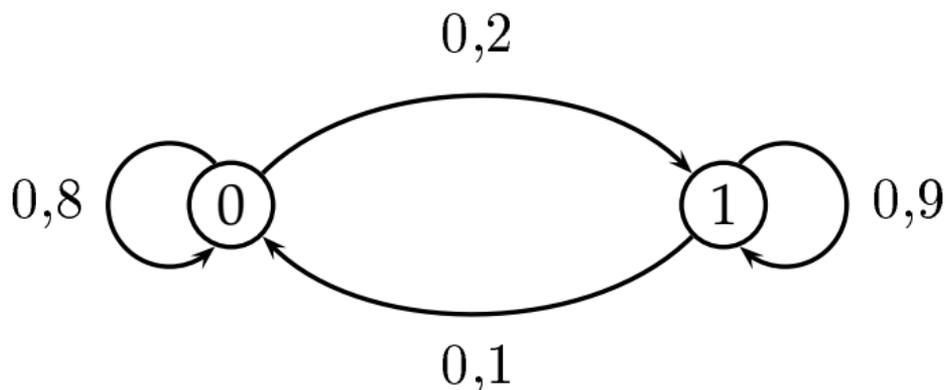
$$\Pr[\omega] = (q_0)_{x_0} \cdot \prod_{i=1}^{t_0} \Pr[X_i = x_i \mid X_{i-1} = x_{i-1}]$$

zu. Dadurch erhalten wir einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum im Sinne der Definition.

## Beispiel 131

$$\Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 1] = 0,9, \Pr[X_{t+1} = 1 \mid X_t = 0] = 0,2$$

$$\Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 1] = 0,1, \Pr[X_{t+1} = 0 \mid X_t = 0] = 0,8$$



Einen bestimmten Ablauf des Systems kann man sich als so genannten **Random Walk** vorstellen.

Wenn wir uns beispielsweise zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Knoten 1 (also  $X_0 = 1$ ) befinden, dann führen von dort zwei Kanten weiter, nämlich zu den Knoten 0 und 1. Diese Kanten sind mit Wahrscheinlichkeiten beschriftet, die sich zu Eins addieren. Gemäß dieser Wahrscheinlichkeiten entscheiden wir zufällig, wohin wir uns im nächsten Schritt begeben.

Wir können auch die Frage beantworten, mit welcher Wahrscheinlichkeit wir uns zum Zeitpunkt  $t = 2$  im Knoten 1 befinden. Da wir vereinbarungsgemäß beim Knoten 1 starten, gibt es zwei mögliche Wege der Länge zwei durch den Graphen mit Endknoten 1, nämlich „111“ und „101“. Die Wahrscheinlichkeiten für diese Wege lauten  $0,9 \cdot 0,9 = 0,9^2$  bzw.  $0,1 \cdot 0,2$ . Insgesamt erhalten wir also eine Wahrscheinlichkeit von  $0,81 + 0,02 = 0,83$ .

Auch eine Aussage über die erwartete Anzahl Schritte, die wir im Knoten 1 bis zum ersten Übergang zu Knoten 0 verbleiben, ist schnell getroffen. Die Wahrscheinlichkeit, dass man genau  $k$  Schritte verbleibt, ist  $(0,9)^k \cdot 0,1$ . Die Anzahl Schritte ist also geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit 0,1. Der Erwartungswert ist daher  $1/0,1 = 10$ .

## 2.2 Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten

Wir beschreiben die Situation zum Zeitpunkt  $t$  durch einen Zustandsvektor  $q_t$  (den wir als Zeilenvektor schreiben). Die  $i$ -te Komponente  $(q_t)_i$  bezeichnet dabei die Wahrscheinlichkeit, mit der sich die Kette nach  $t$  Schritten im Zustand  $i$  aufhält.

Es gilt

$$\Pr[X_{t+1} = k] = \sum_{i=0}^{n-1} \Pr[X_{t+1} = k \mid X_t = i] \cdot \Pr[X_t = i],$$

also

$$(q_{t+1})_k = \sum_{i=0}^{n-1} p_{ik} \cdot (q_t)_i,$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$q_{t+1} = q_t \cdot P.$$

Mit der Matrixschreibweise können wir  $q_t$  einfach durch die Startverteilung  $q_0$  ausdrücken:

$$q_t = q_0 \cdot P^t .$$

Ebenso gilt wegen der Zeithomogenität allgemein für alle  $t, k \in \mathbb{N}$ :

$$q_{t+k} = q_t \cdot P^k .$$

Die Einträge von  $P^k$  geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Übergang vom Zustand  $i$  zum Zustand  $j$  in genau  $k$  Schritten erfolgt.

$$p_{ij}^{(k)} := \Pr[X_{t+k} = j \mid X_t = i] = (P^k)_{ij} .$$

## Exponentiation von Matrizen

Wenn  $P$  diagonalisierbar ist, so existiert eine Diagonalmatrix  $D$  und eine invertierbare Matrix  $B$ , so dass  $P = B \cdot D \cdot B^{-1}$  gilt. Diese erhalten wir durch Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von  $P$  und durch Transformation von  $P$  in den Raum der Eigenvektoren.

Dann gilt

$$P^k = B \cdot D^k \cdot B^{-1} .$$

## Beispiel 132

$$P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Durch Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Matrix  $(P - \lambda \cdot I)$  erhalten wir die Eigenwerte 0,7 und 1, sowie die zugehörigen (rechten) Eigenvektoren

$$\nu_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \nu_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## Beispiel 132

Damit

$$D = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich beispielsweise

$$P^3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7^3 & 0 \\ 0 & 1^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,562 & 0,438 \\ 0,219 & 0,781 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Ankunftswahrscheinlichkeiten und Übergangszeiten

Bei der Analyse von Markov-Ketten treten oftmals Fragestellungen auf, die sich auf zwei bestimmte Zustände  $i$  und  $j$  beziehen:

- Wie wahrscheinlich ist es, von  $i$  irgendwann nach  $j$  zu kommen?
- Wie viele Schritte benötigt die Kette im Mittel, um von  $i$  nach  $j$  zu gelangen?

## Definition 133

Die Zufallsvariable

$$T_{ij} := \min\{n \geq 0 \mid X_n = j, \text{ wenn } X_0 = i\}$$

zählt die Anzahl der Schritte, die von der Markov-Kette für den Weg von  $i$  nach  $j$  benötigt werden.  $T_{ij}$  nennen wir die **Übergangszeit** (engl. **hitting time**) vom Zustand  $i$  zum Zustand  $j$ . Wenn  $j$  nie erreicht wird, setzen wir  $T_{ij} = \infty$ .

Ferner definieren wir  $h_{ij} := \mathbb{E}[T_{ij}]$ .

Die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand  $i$  nach beliebig vielen Schritten in den Zustand  $j$  zu gelangen, nennen wir **Ankunftswahrscheinlichkeit**  $f_{ij}$ . Formal definieren wir

$$f_{ij} := \Pr[T_{ij} < \infty].$$

Im Fall  $i = j$  gilt  $T_{ii} = 0$  und somit auch  $h_{ii} = 0$ , sowie  $f_{ii} = 1$ . Anschaulich ist dies klar: Wenn Anfangs- und Zielzustand identisch sind, so ist die Übergangszeit gleich Null. Für viele Zwecke ist es andererseits auch interessant zu messen, wie lange es dauert, bis Zustand  $i$  zu einem *späteren* Zeitpunkt wieder besucht wird. Wir ergänzen Definition 133 für diesen Fall.

### Definition 134

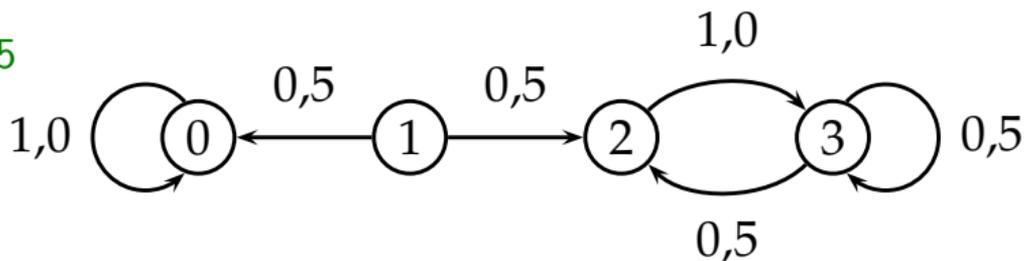
Die Zufallsvariable

$$T_i := \min\{n \geq 1 \mid X_n = i, \text{ wenn } X_0 = i\}$$

zählt die Anzahl Schritte, die von der Markov-Kette benötigt werden, um von  $i$  nach  $i$  zurückzukehren (**Rückkehrzeit**, engl. **recurrence time**). Der Erwartungswert sei  $h_i := \mathbb{E}[T_i]$ . Die Wahrscheinlichkeit, mit der  $T_i$  einen endlichen Wert annimmt, nennt man **Rückkehrwahrscheinlichkeit**:

$$f_i := \Pr[T_i < \infty].$$

## Beispiel 135

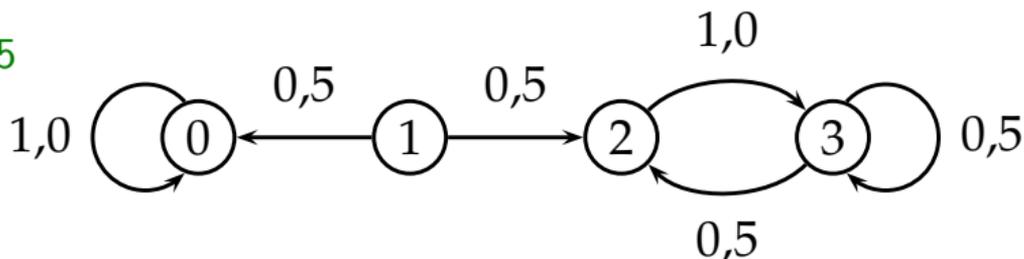


Beispiel zur Berechnung von  $f_{ij}$  und  $h_{ij}$

Wir betrachten die obige Markov-Kette. Einige Besonderheiten fallen sofort auf:

- Beginnt man im Zustand 0, so kann man niemals einen der übrigen Zustände erreichen. Die Übergangszeiten  $T_{01}$ ,  $T_{02}$  und  $T_{03}$  sind daher  $\infty$ .

### Beispiel 135

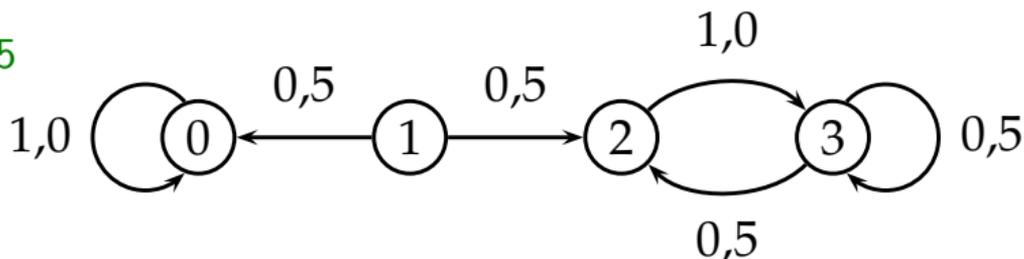


- Beginnt man im Zustand 1, so entscheidet sich im ersten Schritt, ob die Kette sich zukünftig im „linken Teil“ (Zustand 0) oder im „rechten Teil“ (Zustand 2 und 3) aufhält. Für die Übergangszeit  $T_{10}$  gilt daher

$$T_{10} = \begin{cases} 1 & \text{falls } X_1 = 0, \\ \infty & \text{falls } X_1 = 2. \end{cases}$$

Wegen  $\Pr[X_1 = 0 \mid X_0 = 1] = 0,5$  folgt  $f_{10} = 0,5$  und  $\mathbb{E}[T_{10}] = \infty$ .

## Beispiel 135



- Beginnt man im Zustand 2 oder 3, so wird die Kette auch weiterhin zwischen den Zuständen 2 und 3 „hin und her pendeln“. Genauer:  
Die Anzahl der Schritte, in denen die Kette im Zustand 3 bleibt, ist geometrisch verteilt mit Parameter 0,5. Der Zustand 3 wird daher im Mittel nach  $1/0,5 = 2$  Schritten verlassen. Da Zustand 2 der einzige Nachbar von 3 ist, folgt  $h_{32} = 2$  und somit insbesondere auch  $f_{32} = 1$ .

## Lemma 136

Für die erwarteten Übergangs-/Rückkehrzeiten gilt

$$h_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \text{ für alle } i, j \in S, i \neq j,$$

$$h_j = 1 + \sum_{k \neq j} p_{jk} h_{kj} ,$$

sofern die Erwartungswerte  $h_{ij}$  und  $h_{kj}$  existieren.

Für die Ankunfts-/Rückkehrwahrscheinlichkeiten gilt analog

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj} \text{ für alle } i, j \in S, i \neq j;$$

$$f_j = p_{jj} + \sum_{k \neq j} p_{jk} f_{kj} .$$

## Beweis:

Sei  $i \neq j$ . Wir bedingen auf das Ergebnis des ersten Schritts der Markov-Kette und erhalten aufgrund der Gedächtnislosigkeit  $\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = k] = \Pr[T_{kj} < \infty]$  für  $k \neq j$  sowie  $\Pr[T_{ij} < \infty \mid X_1 = j] = 1$ .

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \Pr[T_{ij} < \infty] = \sum_{k \in S} \Pr[T_{kj} < \infty \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} \Pr[T_{kj} < \infty] \cdot p_{ik} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}. \end{aligned}$$

Die Ableitung für  $f_j$  (also  $i = j$ ) ist analog.

## Beweis:

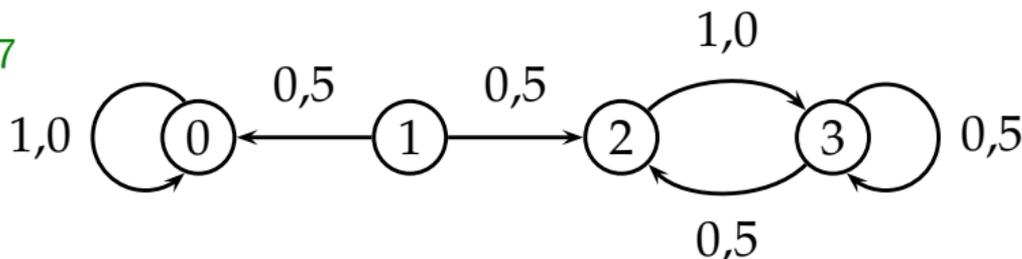
Sei wiederum  $i \neq j$ . Wegen der Gedächtnislosigkeit folgt  $\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] = 1 + \mathbb{E}[T_{kj}]$  für  $k \neq j$ . Ferner gilt  $\mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = j] = 1$ .

Bedingen wir wieder auf das Ergebnis des ersten Schritts, so folgt (siehe Satz 36):

$$\begin{aligned} h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] &= \sum_{k \in S} \mathbb{E}[T_{ij} \mid X_1 = k] \cdot p_{ik} \\ &= p_{ij} + \sum_{k \neq j} (1 + \mathbb{E}[T_{kj}]) \cdot p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \cdot p_{ik}. \end{aligned}$$

Wiederum ist die Herleitung für  $h_j$  analog. □

### Beispiel 137



Für die Berechnung der Übergangszeiten für die Zustände 2 und 3 erhalten wir die Gleichungen

$$h_2 = 1 + h_{32}, \quad h_3 = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{23}$$

und

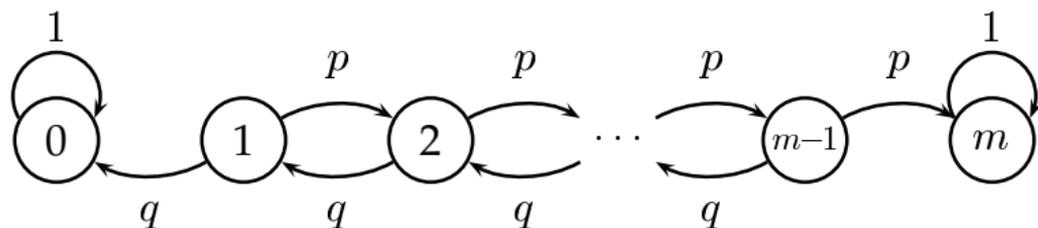
$$h_{23} = 1, \quad h_{32} = 1 + \frac{1}{2} h_{32} = 2.$$

Durch Lösen dieses Gleichungssystems erhalten wir die Werte  $h_2 = 3$ ,  $h_3 = 1,5$ ,  $h_{23} = 1$  und  $h_{32} = 2$ , die man leicht verifiziert. Die Anankunftswahrscheinlichkeiten lassen sich analog herleiten. Man erhält  $f_2 = f_3 = f_{23} = f_{32} = 1$ .

## 2.4 Das Gambler's Ruin Problem

Anna und Bodo spielen Poker, bis einer von ihnen bankrott ist.  $A$  verfügt über Kapital  $a$ , und  $B$  setzt eine Geldmenge in Höhe von  $m - a$  aufs Spiel. Insgesamt sind also  $m$  Geldeinheiten am Spiel beteiligt. In jeder Pokerrunde setzen  $A$  und  $B$  jeweils eine Geldeinheit.  $A$  gewinnt jedes Spiel mit Wahrscheinlichkeit  $p$ .  $B$  trägt folglich mit Wahrscheinlichkeit  $q := 1 - p$  den Sieg davon. Wir nehmen an, dass diese Wahrscheinlichkeiten vom bisherigen Spielverlauf und insbesondere vom Kapitalstand der Spieler unabhängig sind.

Wir modellieren das Spiel durch die Markov-Kette



$A$  interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, mit der sie  $B$  in den Ruin treibt, also für die Wahrscheinlichkeit  $f_{a,m}$  (wir schreiben hier der Deutlichkeit halber  $f_{i,j}$  statt  $f_{ij}$ ).

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} f_{i,m} &= p \cdot f_{i+1,m} + q \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m-1, \\ f_{m-1,m} &= p + q \cdot f_{m-2,m}, \\ f_{0,m} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Wir wollen nun  $f_{i,m}$  allgemein als Funktion von  $m$  berechnen. Dazu beobachten wir zunächst, dass wir (10) wegen  $f_{m,m} = 1$  umschreiben können zu

$$f_{i+1,m} = (1/p) \cdot f_{i,m} - (q/p) \cdot f_{i-1,m} \text{ für } 1 \leq i < m. \quad (11)$$

Wir ergänzen (11) um die Anfangswerte

$$f_{0,m} = 0 \text{ und } f_{1,m} = \xi.$$

(Für den Moment fassen wir  $\xi$  als Variable auf. Nach Lösung der Rekursion werden wir  $\xi$  so wählen, dass die Bedingung  $f_{m,m} = 1$  erfüllt ist.)

Als Lösung dieser linearen homogenen Rekursionsgleichung 2. Ordnung (11) ergibt sich für  $p \neq 1/2$ :

$$f_{i,m} = \frac{p \cdot \xi}{2p - 1} \cdot \left( 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^i \right).$$

Setzen wir nun  $i = m$ , so folgt aus  $f_{m,m} = 1$ , dass

$$\xi = \frac{2p - 1}{p \cdot \left( 1 - \left( \frac{1-p}{p} \right)^m \right)}$$

gelten muss.

Insgesamt erhalten wir somit das Ergebnis:

$$f_{j,m} = \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^j}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^m}.$$

Für  $p = 1/2$  verläuft die Rechnung ähnlich.

## Beispiel 138

Wir wollen berechnen, wie lange  $A$  und  $B$  im Mittel spielen können, bis einer von ihnen bankrott geht.

$h_{a,m}$  eignet sich dazu i.a. nicht (warum?).

Wir betrachten stattdessen:

$T'_i :=$  „Anzahl der Schritte von Zustand  $i$  nach  
Zustand 0 oder  $m$ “

und setzen

$$d_i := \mathbb{E}[T'_i].$$

Offensichtlich gilt  $d_0 = d_m = 0$  und für  $1 \leq i < m$

$$d_i = qd_{i-1} + pd_{i+1} + 1 .$$

## Beispiel (Forts.)

*Wir betrachten nun nur den Fall  $p = q = 1/2$  und erhalten*

$$d_i = i \cdot (m - i) \text{ für alle } i = 0, \dots, m.$$

*Wegen  $d_i \leq mi \leq m^2$  folgt also, dass das Spiel unabhängig vom Startzustand im Mittel nach höchstens  $m^2$  Schritten beendet ist.*

## 2.5 Stationäre Verteilung

Reale dynamische Systeme laufen oft über eine lange Zeit. Für solche Systeme ist es sinnvoll, das Verhalten für  $t \rightarrow \infty$  zu berechnen.

Wir betrachten wieder die Markov-Kette aus unserem **Beispiel**. Wir hatten **gezeigt**, dass für die Übergangsmatrix  $P$  gilt:

$$P = B \cdot D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$P^t = B \cdot D^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{10}\right)^t & 0 \\ 0 & 1^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

und für  $t \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Für eine beliebige Startverteilung  $q_0 = (a, 1 - a)$  folgt

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} q_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_0 \cdot P^t = (a, 1 - a) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(1 - a), \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}(1 - a) \right) = \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).\end{aligned}$$

Das System konvergiert also **unabhängig vom Startzustand** in eine feste Verteilung. Der zugehörige Zustandsvektor  $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  hat eine interessante Eigenschaft:

$$\pi \cdot P = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \pi.$$

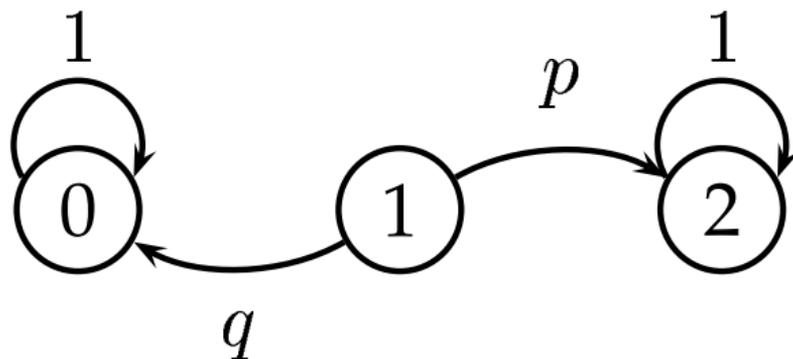
$\pi$  ist also ein Eigenvektor der Matrix  $P$  zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links. Dies bedeutet: Wenn die Kette einmal den Zustandsvektor  $\pi$  angenommen hat, so bleibt dieser bei allen weiteren Übergängen erhalten.

### Definition 139

$P$  sei die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Einen Zustandsvektor  $\pi$  mit  $\pi = \pi \cdot P$  nennen wir **stationäre Verteilung** der Markov-Kette.

Besitzen alle Markov-Ketten die Eigenschaft, dass sie unabhängig vom Startzustand in eine bestimmte stationäre Verteilung konvergieren?

Nein!



Eine Markov-Kette mit absorbierenden Zuständen

Die Abbildung zeigt die Kette aus dem „gamblers ruin problem“ für  $m = 2$ . Man sieht sofort, dass hier sowohl  $\pi_1 = (1, 0, 0)$  als auch  $\pi_2 = (0, 0, 1)$  stationäre Verteilungen sind. Die beiden Zustände 0 und 2 haben jeweils keine ausgehenden Kanten. Solche Zustände heißen **absorbierend**.

## Definition 140

Wir bezeichnen einen Zustand  $i$  als **absorbierend**, wenn aus ihm keine Übergänge herausführen, d.h.  $p_{ij} = 0$  für alle  $j \neq i$  und folglich  $p_{ii} = 1$ .

Ein Zustand  $i$  heißt **transient**, wenn  $f_i < 1$ , d.h. mit positiver Wahrscheinlichkeit  $1 - f_i > 0$  kehrt der Prozess nach einem Besuch von  $i$  nie mehr dorthin zurück.

Ein Zustand  $i$  mit  $f_i = 1$  heißt **rekurrent**.

## Definition 141

Eine Markov-Kette heißt **irreduzibel**, wenn es für alle Zustandspaare  $i, j \in S$  eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .

Die Definition besagt anschaulich, dass jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann, wenn man nur genügend viele Schritte durchführt. Dies ist bei endlichen Markov-Ketten genau dann der Fall, wenn der gerichtete Graph des Übergangsdiagramms stark zusammenhängend ist.

## Lemma 142

Für irreduzible endliche Markov-Ketten gilt:  $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$  für alle Zustände  $i, j \in S$ . Zusätzlich gilt auch, dass die Erwartungswerte  $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$  alle existieren.

## Beweis:

Wir betrachten zunächst den Beweis für die Existenz von  $h_{ij}$ .

Für jeden Zustand  $k$  gibt es nach Definition der Irreduzibilität ein  $n_k$ , so dass  $p_{kj}^{(n_k)} > 0$ . Wir halten  $n_k$  fest und setzen  $n := \max_k n_k$  und  $p := \min_k p_{kj}^{(n_k)}$ .

Von einem beliebigen Zustand aus gelangen wir nach höchstens  $n$  Schritten mit Wahrscheinlichkeit mindestens  $p$  nach  $j$ . Wir unterteilen die Zeit in Phasen zu  $n$  Schritten und nennen eine Phase erfolgreich, wenn während dieser Phase ein Besuch bei  $j$  stattgefunden hat. Die Anzahl von Phasen bis zur ersten erfolgreichen Phase können wir durch eine geometrische Verteilung mit Parameter  $p$  abschätzen. Die erwartete Anzahl von Phasen ist somit höchstens  $1/p$ , und wir schließen  $h_{ij} \leq (1/p)n$ . Daraus folgt sofort, dass auch  $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$ .  $\square$

## Satz 143

Eine irreduzible endliche Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung  $\pi$ , und es gilt  $\pi_j = 1/h_{jj}$  für alle  $j \in S$ .

### Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass es einen Vektor  $\pi \neq 0$  mit  $\pi = \pi P$  gibt. Sei  $e := (1, \dots, 1)^T$  der All-1-Vektor und  $I$  die Einheitsmatrix. Für jede Übergangsmatrix  $P$  gilt  $P \cdot e = e$ , da sich die Einträge der Zeilen von  $P$  zu Eins addieren. Daraus folgt  $0 = Pe - e = (P - I)e$ , und die Matrix  $P - I$  ist somit singulär. Damit ist auch die transponierte Matrix  $(P - I)^T = P^T - I$  singulär. Es gibt also einen (Spalten-)Vektor  $\pi \neq 0$  mit  $(P^T - I) \cdot \pi = 0$  bzw.  $\pi^T P = \pi^T$ . Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\sum_i \pi_i \neq 0$ . Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\pi$  normiert ist, also dass  $\sum_i \pi_i = 1$  gilt.

## Beweis (Forts.):

Wegen Lemma 142 existieren die Erwartungswerte  $h_{ij}$ . Für jeden Zustand  $j \in S$  gelten somit nach Lemma 136 die Gleichungen

$$\pi_i h_{ij} = \pi_i \left( 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \right) \quad \text{für } i \in S, i \neq j.$$

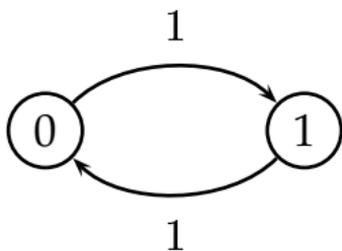
Wir addieren diese Gleichungen und erhalten wegen  $\sum_i \pi_i = 1$

$$\begin{aligned} \pi_j h_j + \sum_{i \neq j} \pi_i h_{ij} &= 1 + \sum_{i \in S} \sum_{k \neq j} \pi_i p_{ik} h_{kj} \\ &= 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} \pi_k h_{kj}. \end{aligned}$$

Wegen  $h_j > 0$  ist auch  $\pi_j = 1/h_j$  positiv, und  $\pi$  stellt somit einen zulässigen Zustandsvektor dar.

Für den Fall  $\sum_i \pi_i = 0$  zeigt die entsprechende Rechnung wie zuvor, dass  $\pi_j = 0$  für alle  $j \in S$  gilt. Dies steht im Widerspruch zu  $\pi \neq 0$ . □

Auch wenn eine Markov-Kette irreduzibel ist und somit eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt, so muss sie nicht zwangsläufig in diese Verteilung konvergieren.



Eine Markov-Kette mit periodischen Zuständen

Als Startverteilung nehmen wir  $q_0 = (1, 0)$  an. Es gilt:

$$q_t = \begin{cases} (1, 0) & \text{falls } t \text{ gerade,} \\ (0, 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kette pendelt also zwischen den beiden Zustandsvektoren  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  hin und her.

## Definition 144

Die **Periode** eines Zustands  $j$  ist definiert als die größte Zahl  $\xi \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode  $\xi = 1$  heißt **aperiodisch**. Wir nennen eine Markov-Kette aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $p_{ii}^{(n)} > 0$  genau dann, wenn es im Übergangsdigramm einen geschlossenen Weg von  $i$  nach  $i$  der Länge  $n$  gibt.

Damit folgt insbesondere:

Ein Zustand  $i \in S$  einer endlichen Markov-Kette ist sicherlich dann aperiodisch, wenn er im Übergangsdigramm

- eine Schleife besitzt (also  $p_{ii} > 0$ ) oder
- auf mindestens zwei geschlossenen Wegen  $W_1$  und  $W_2$  liegt, deren Längen  $l_1$  und  $l_2$  teilerfremd sind (für die also  $\text{ggT}(l_1, l_2) = 1$  gilt).

## Lemma 145

Ein Zustand  $i \in S$  ist genau dann aperiodisch, falls gilt: Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $p_{ii}^{(n)} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ .

### Beweis:

Da je zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind, folgt aus der Existenz eines  $n_0$  mit der im Lemma angegebenen Eigenschaft sofort die Aperiodizität des Zustands. Nehmen wir daher umgekehrt an, dass der Zustand  $i$  aperiodisch ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus kann man die folgende Aussage zeigen. Für je zwei natürliche Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass gilt: Bezeichnet  $d := \text{ggT}(a, b)$  den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$ , so gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$  nichtnegative Zahlen  $x, y \in \mathbb{N}_0$  mit  $nd = xa + yb$ .

## Beweis (Forts.):

Wegen  $p_{ii}^{(xa+yb)} \geq (p_{ii}^{(a)})^x \cdot (p_{ii}^{(b)})^y$  folgt daraus unmittelbar: Gilt für  $a, b \in \mathbb{N}$ , dass sowohl  $p_{ii}^{(a)}$  als auch  $p_{ii}^{(b)}$  positiv sind, so gilt auch  $p_{ii}^{(nd)} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

Aus der Aperiodizität des Zustand  $i$  folgt andererseits, dass es Werte  $a_0, \dots, a_k$  geben muss mit  $p_{ii}^{(a_i)} > 0$  und der Eigenschaft, dass für  $d_1 = \text{ggT}(a_0, a_1)$  und  $d_i := \text{ggT}(d_{i-1}, a_i)$  für  $i = 2, \dots, k$  gilt:  $d_1 > d_2 > \dots > d_k = 1$ .

Aus beiden Beobachtungen zusammen folgt die Behauptung. □

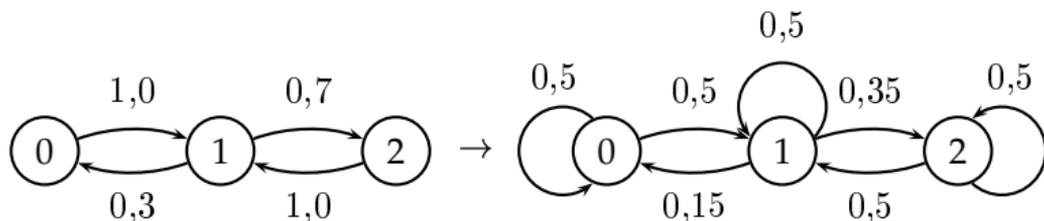
## Korollar 146

Für irreduzible, aperiodische endliche Markov-Ketten gilt: Es gibt ein  $t \in \mathbb{N}$ , so dass unabhängig vom Startzustand  $(q_t)_i > 0$  für alle  $i \in S$ .

### Beweis:

Aus der Irreduzibilität folgt, dass die Markov-Kette jeden Zustand  $i \in S$  irgendwann besuchen wird. Wegen Lemma 145 wissen wir ferner, dass die Kette hinreichend viele Schritte nach dem ersten Besuch in  $i$  in jedem folgenden Zeitschritt mit positiver Wahrscheinlichkeit zu  $i$  zurückkehren wird. Da die Kette endlich ist, gibt es daher ein  $n_0$ , so dass die Kette sich unabhängig vom Startzustand für alle  $n \geq n_0$  in jedem Zustand  $i \in S$  mit positiver Wahrscheinlichkeit aufhält. □

Die **Aperiodizität** einer irreduziblen Markov-Kette kann auf einfache Weise sichergestellt werden. Man fügt an alle Zustände so genannte **Schleifen** an. Diese versieht man mit der Übergangswahrscheinlichkeit  $p = 1/2$  und halbiert die Wahrscheinlichkeiten an allen übrigen Kanten.



### Einführung von Schleifen

Bei irreduziblen Ketten genügt es, eine einzige Schleife einzuführen, um die Aperiodizität der Kette sicherzustellen.

#### Definition 147

Irreduzible, aperiodische Markov-Ketten nennt man **ergodisch**.

## Satz 148 (Fundamentalsatz für ergodische Markov-Ketten)

Für jede ergodische endliche Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  gilt unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \pi,$$

wobei  $\pi$  die eindeutige stationäre Verteilung der Kette bezeichnet.

### Beweis:

Gemäß Satz 143 existiert eine stationäre Verteilung  $\pi$ . Wir zeigen, dass für beliebige Zustände  $i$  und  $k$  gilt

$$p_{ik}^{(n)} \rightarrow \pi_k \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$(q_n)_k = \sum_{i \in S} (q_0)_i \cdot p_{ik}^{(n)} \rightarrow \pi_k \cdot \sum_{i \in S} (q_0)_i = \pi_k.$$

## Beweis (Forts.):

$(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  sei eine unabhängige Kopie der Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ . Für den Prozess  $Z_t := (X_t, Y_t)$  ( $t \in \mathbb{N}_0$ ), bei dem die Ketten  $X_t$  und  $Y_t$  gewissermaßen „parallel“ betrieben werden, gilt also

$$\begin{aligned} \Pr[(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (j_x, j_y) \mid (X_t, Y_t) = (i_x, i_y)] \\ &= \Pr[X_{t+1} = j_x \mid X_t = i_x] \cdot \Pr[Y_{t+1} = j_y \mid Y_t = i_y] \\ &= p_{i_x j_x} \cdot p_{i_y j_y}. \end{aligned}$$

$(Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  ist daher ebenfalls eine Markov-Kette. Für die Wahrscheinlichkeit, in  $n$  Schritten von  $(i_x, i_y)$  nach  $(j_x, j_y)$  zu gelangen, erhält man analog  $p_{i_x j_x}^{(n)} p_{i_y j_y}^{(n)}$ , was für genügend großes  $n$  gemäß Lemma 145 positiv ist.  $(Z_t)_{t_0 \in \mathbb{N}}$  ist daher ebenfalls ergodisch.

## Beweis (Forts.):

Wir starten nun  $Z_t$  so, dass die Ketten  $X_t$  und  $Y_t$  in verschiedenen Zuständen  $i_x$  bzw.  $i_y$  beginnen, und interessieren uns für den Zeitpunkt  $H$ , bei dem sich  $X_t$  und  $Y_t$  zum ersten Mal im gleichen Zustand befinden.

Die Menge der Zustände von  $Z_t$  ist gegeben durch  $S \times S$ . Wir definieren die Menge

$$M := \{(x, y) \in S \times S \mid x = y\}.$$

von Zuständen der Kette  $Z_t$ , an denen sich  $X_t$  und  $Y_t$  „treffen“. Definieren wir nun die Treffzeit  $H$  durch

$$H := \max\{T_{(i_x, i_y), (j_x, j_y)} \mid (i_x, i_y) \in S \times S, (j_x, j_y) \in M\},$$

so folgt aus Lemma 142 und der Endlichkeit der Markov-Kette sofort, dass  $\Pr[H < \infty] = 1$  und  $\mathbb{E}[H] < \infty$ .

## Beweis (Forts.):

Da die weitere Entwicklung der Ketten  $X_t$  und  $Y_t$  ab dem Zeitpunkt  $H$  nur vom Zustand  $X_H = Y_H$  und der Übergangsmatrix abhängt, wird jeder Zustand  $s \in S_Z$  zu den Zeiten  $t \geq H$  von  $X_t$  und  $Y_t$  mit derselben Wahrscheinlichkeit angenommen. Es gilt also  $\Pr[X_t = s \mid t \geq H] = \Pr[Y_t = s \mid t \geq H]$  und somit auch

$$\Pr[X_t = s, t \geq H] = \Pr[Y_t = s, t \geq H]. \quad (12)$$

Als Startzustand wählen wir für die Kette  $X_t$  den Zustand  $i$ , während  $Y_t$  in der stationären Verteilung  $\pi$  beginnt (und natürlich auch bleibt). Damit erhalten wir für einen beliebigen Zustand  $k \in S$  und  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |p_{ik}^{(n)} - \pi_k| &= |\Pr[X_n = k] - \Pr[Y_n = k]| \\ &= |\Pr[X_n = k, n \geq H] + \Pr[X_n = k, n < H] \\ &\quad - \Pr[Y_n = k, n \geq H] - \Pr[Y_n = k, n < H]|. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Nun können wir (12) anwenden und schließen, dass

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| = |\Pr[X_n = k, n < H] - \Pr[Y_n = k, n < H]|.$$

Zur Abschätzung dieses Ausdrucks benutzen wir die Abschätzung

$$|\Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C]| \leq \Pr[A].$$

für beliebige Ereignisse  $A$ ,  $B$  und  $C$  (die offensichtlich ist).

Wir erhalten

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| \leq \Pr[n < H].$$

Da  $\Pr[H < \infty] = 1$ , gilt  $\Pr[n < H] \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , d.h. die Wahrscheinlichkeiten  $p_{ik}^{(n)}$  konvergieren für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\pi_k$ . □

## 2.6 Doppelstochastische Matrizen

Wie berechnet man die nach Satz 148 (eindeutig bestimmte) stationäre Verteilung, gegen die ergodische endliche Markov-Ketten für jede Startverteilung konvergieren?

Eine Möglichkeit besteht darin, das lineare Gleichungssystem  $\pi \cdot P = \pi$  aufzustellen und zu lösen. Für größere Matrizen ist dieses Verfahren allerdings im Allgemeinen sehr aufwändig.

Wir stellen hier einen anderen Ansatz vor.

## Definition 149

Eine  $n \times n$  Matrix  $P = (p_{ij})_{0 \leq i, j < n}$  heißt **stochastisch**, falls alle Einträge  $p_{ij}$  nichtnegativ und alle Zeilensummen gleich Eins sind:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } i = 0, \dots, n-1.$$

Sind zusätzlich auch alle Spaltensummen gleich 1, also

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = 1 \text{ für alle } j = 0, \dots, n-1,$$

so nennt man  $P$  **doppelstochastisch**.

Die Übergangsmatrix einer Markov-Kette ist immer stochastisch, und umgekehrt.

## Lemma 150

Ist  $P$  eine doppelstochastische  $n \times n$  Matrix, so ist  $\pi = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$  ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links:

$$\pi = \pi \cdot P.$$

### Beweis:

Für alle  $0 \leq k < n$  gilt:

$$(\pi \cdot P)_k = \sum_{i=0}^{n-1} \pi_i \cdot p_{ik} = \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} p_{ik}}_{=1} = \frac{1}{n} = \pi_k.$$

□

Zusammen mit Satz 148 erhalten wir damit sofort:

### Satz 151

*Für jede ergodische endliche Markov-Kette  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  mit doppelstochastischer Übergangsmatrix gilt unabhängig vom Startzustand*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right),$$

wobei  $n$  die Kardinalität der Zustandsmenge bezeichne.

Beweis:

Klar!



## Beispiel 152

Anna und Bodo verabreden sich wieder einmal zu einer Partie Poker. Misstrauisch geworden durch ihre Verluste beim letzten Rendezvous verdächtigt Anna mittlerweile ihren Spielpartner, beim Mischen zu mogeln. Um ganz sicher zu gehen, dass die Karten zukünftig auch wirklich gut gemischt werden, schlägt sie folgendes Verfahren vor: Der Stapel mit Karten wird verdeckt hingelegt; dann werden  $m$ -mal jeweils zwei Karten daraus zufällig ausgewählt und vertauscht. Soll Bodo dieser Prozedur zustimmen?

## Beispiel 152

Wir modellieren den oben skizzierten Mischvorgang durch eine Markov-Kette. Als Zustandsmenge  $S$  wählen wir alle möglichen Anordnungen der Karten. Identifizieren wir die Karten mit den Zahlen  $[n] = \{1, \dots, n\}$ , so besteht  $S$  aus der Menge aller Permutationen der Menge  $[n]$ .

Betrachten wir nun zwei verschiedene Permutationen  $\sigma, \rho \in S$ . Nach Definition der Markov-Kette ist die Übergangswahrscheinlichkeit  $p_{\sigma, \rho}$  genau dann positiv, wenn es  $i, j \in [n]$ ,  $i \neq j$ , gibt, so dass

$$\rho(k) = \begin{cases} \sigma(j) & \text{falls } k = i, \\ \sigma(i) & \text{falls } k = j, \\ \sigma(k) & \text{sonst.} \end{cases}$$

## Beispiel 152

Da nach Voraussetzung  $i$  und  $j$  zufällig gewählt werden (und es genau  $\binom{n}{2}$  solcher Paare  $i, j$  gibt), gilt in diesem Fall  $p_{\sigma, \rho} = 1/\binom{n}{2}$ .

Da man jede Vertauschung zweier Karten durch nochmaliges Vertauschen wieder rückgängig machen kann, sieht man auch sofort ein, dass  $p_{\sigma, \rho} = p_{\rho, \sigma}$  gilt. Die Übergangsmatrix  $P$  ist also symmetrisch und damit insbesondere auch doppelstochastisch. Aus Satz 151 folgt somit, dass die Markov-Kette unabhängig von der Startverteilung zur Gleichverteilung konvergiert.

Der von Anna vorgeschlagene Mischvorgang ist also in der Tat sinnvoll: Für  $m \rightarrow \infty$  konvergiert die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die sich ergebende Kartenreihenfolge gegen die Gleichverteilung, die Karten sind also bestens gemischt!

## Beispiel 152

Anmerkung: Man kann zeigen, dass für  $n$  Karten bereits  $m = O(n \log n)$  Vertauschungen genügen, um einen gut durchmischten Kartenstapel zu erhalten.

## 3. Prozesse mit kontinuierlicher Zeit

### 3.1 Einführung

Wir betrachten nun Markov-Ketten  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ .

Wie beim Übergang von der geometrischen zur Exponentialverteilung können wir uns auch hier einen Grenzprozess vorstellen.

Wie dort folgt, dass die Aufenthaltsdauer im Zustand 0 gemessen in Schritten der diskreten Markov-Kette geometrisch verteilt ist und im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  in eine kontinuierliche Zufallsvariable übergeht, die exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda$  ist. Den Parameter  $\lambda$  bezeichnen wir auch als **Übergangsrate**.

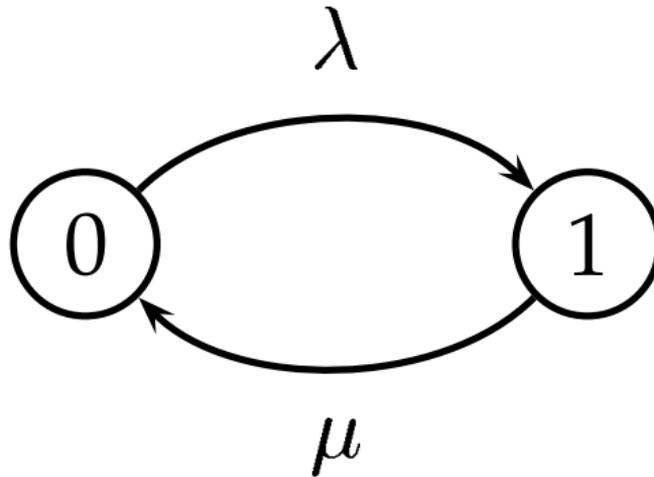


Abbildung: Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit

## Definition 153

Eine unendliche “Folge” von Zufallsvariablen  $X(t)$  ( $t \in \mathbb{R}_0^+$ ) mit Wertemenge  $S$  nennen wir (diskrete) **Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit**, wenn gilt:

- $S$  ist diskret, d.h. wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $S \subseteq \mathbb{N}_0$ .
- Die Zufallsvariablen erfüllen die **Markovbedingung**:  
Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und beliebige Zeitpunkte  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$  und Zustände  $s, s_0, \dots, s_n \in S$  gilt

$$\begin{aligned} \Pr[X(t) = s \mid X(t_n) = s_n, \dots, X(t_0) = s_0] = \\ \Pr[X(t) = s \mid X(t_n) = s_n]. \end{aligned} \quad (13)$$

Eine Markov-Kette heißt **zeithomogen**, wenn für alle Zustände  $i, j \in S$  und für alle  $u, t \in \mathbb{R}_0^+$  gilt:

$$\Pr[X(t+u) = j \mid X(t) = i] = \Pr[X(u) = j \mid X(0) = i]$$

Die **Markov-Bedingung (13)** besagt anschaulich Folgendes: Wenn wir den Zustand des Systems zu einer Reihe von Zeitpunkten  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  kennen, so ist für das Verhalten nach dem Zeitpunkt  $t_n$  nur der Zustand zur Zeit  $t_n$  maßgebend. Anders formuliert heißt dies: Wenn wir den Zustand des Systems zur Zeit  $t_n$  kennen, so besitzen wir bereits die gesamte relevante Information, um Wahrscheinlichkeiten für das zukünftige Verhalten zu berechnen. Die „Geschichte“ des Systems, d.h. der „Weg“, auf dem der Zustand zur Zeit  $t_n$  erreicht wurde, spielt dabei keine Rolle. Eine Markov-Kette mit kontinuierlicher Zeit ist also ebenso wie eine Markov-Kette mit diskreter Zeit **gedächtnislos**.

Wie schon bei diskreten Markov-Ketten werden wir uns auch bei Markov-Ketten mit kontinuierlicher Zeit auf zeithomogene Markov-Ketten beschränken und diese Eigenschaft im Folgenden stillschweigend voraussetzen.

## Gedächtnislosigkeit der Aufenthaltsdauer

Sei  $Y$  die Aufenthaltsdauer in einem bestimmten Zustand, in dem sich die Markov-Kette zur Zeit  $t = 0$  befindet. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Pr[Y \geq t] &= \Pr[X(t') = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(0) = 0] \\ &= \Pr[X(t' + u) = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(u) = 0] \\ &= \Pr[X(t' + u) = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t \mid X(t'') = 0 \text{ f. a. } 0 \leq t'' \leq u] \\ &= \Pr[X(t') = 0 \text{ für alle } 0 < t' < t + u \mid X(t'') = 0 \text{ f. a. } 0 \leq t'' \leq u] \\ &= \Pr[Y \geq t + u \mid Y \geq u].\end{aligned}$$

Die Aufenthaltsdauer  $Y$  erfüllt also die Bedingung der Gedächtnislosigkeit und muss daher nach Satz 105 exponentialverteilt sein.

## Bestimmung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

Wie zuvor bei Markov-Ketten mit diskreter Zeit interessieren wir uns auch bei kontinuierlichen Markov-Ketten für die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das System zur Zeit  $t$  in einem bestimmten Zustand befindet. Dazu gehen wir von einer **Startverteilung**  $q(0)$  mit  $q_i(0) := \Pr[X(0) = i]$  für alle  $i \in S$  aus und definieren die **Aufenthaltswahrscheinlichkeit**  $q_i(t)$  im Zustand  $i$  zum Zeitpunkt  $t$  durch  $q_i(t) := \Pr[X(t) = i]$ .

Zur Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeiten verwenden wir zum einen die soeben gezeigte Tatsache, dass die Aufenthaltsdauer in jedem Zustand  $i$  exponentialverteilt sein muss.

Weiter bezeichnen wir mit  $\nu_{ij}$  die **Übergangsrate** vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$ , sowie  $\nu_i := \sum_{j \in S} \nu_{ij}$ .

Wir betrachten nun ein kleines Zeitintervall  $d t$ . Dann ergibt sich die Änderung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit in diesem Zeitintervall als Summe aller „zufließenden“ abzüglich aller „abfließenden“ Wahrscheinlichkeiten. Für alle Zustände  $i \in S$  gilt

$$\underbrace{d q_i(t)}_{\text{Änderung}} = \left( \underbrace{\sum_j q_j(t) \cdot \nu_{ji}}_{\text{Zufluss}} - \underbrace{q_i(t) \nu_i}_{\text{Abfluss}} \right) \cdot d t. \quad (14)$$

Das Lösen des Differentialgleichungssystems (14) ist meist sehr aufwändig. Wir werden es im Folgenden durch Betrachtung des Grenzwertes für  $t \rightarrow \infty$  zu gewöhnlichen linearen Gleichungen vereinfachen.

### Definition 154

Zustand  $j$  ist von  $i$  aus **erreichbar**, wenn es ein  $t \geq 0$  gibt mit

$$\Pr[X(t) = j \mid X(0) = i] > 0 .$$

Eine Markov-Kette, in der je zwei Zustände  $i$  und  $j$  untereinander erreichbar sind, heißt **irreduzibel**.

## Satz 155

*Für irreduzible kontinuierliche Markov-Ketten existieren die Grenzwerte*

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t)$$

*für alle  $i \in S$ , und ihre Werte sind unabhängig vom Startzustand.*

Ohne Beweis.

Wenn für  $t \rightarrow \infty$  Konvergenz erfolgt, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d q_i(t)}{d t} = 0,$$

da sich  $q_i(t)$  für genügend große  $t$  „so gut wie nicht mehr“ ändert. Diese Gleichung setzen wir in die Differentialgleichungen (14) ein und erhalten

$$0 = \sum_j \pi_j \nu_{ji} - \pi_i \nu_i$$

für alle  $i \in S$ .

Dieses Gleichungssystem hat immer die triviale Lösung  $\pi_i = 0$  für alle  $i \in S$ . Wir suchen jedoch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung, und  $\pi$  muss deshalb zusätzlich die Normierungsbedingung  $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$  erfüllen. Bei Markov-Ketten mit endlicher Zustandsmenge  $S$  führt dieses Verfahren immer zum Ziel. Wenn  $S$  jedoch unendlich ist, gibt es Fälle, in denen  $\pi_1 = \pi_2 = \dots = 0$  die einzige Lösung darstellt und wir somit keine gültige Wahrscheinlichkeitsverteilung erhalten.

## 3.2 Warteschlangen

Für ein System mit  $m$  Servern und einer gemeinsamen Warteschlange hat sich die Bezeichnung  $X/Y/m$ -Warteschlange eingebürgert. Dabei ersetzt man  $X$  und  $Y$  durch Buchstaben, die jeweils für eine bestimmte Verteilung stehen. Beispielsweise bezeichnet „D“ eine feste Dauer (von engl. *deterministic*), „M“ die Exponentialverteilung (das M kommt von *memoryless*, dem englischen Wort für gedächtnislos) und „G“ eine beliebige Verteilung (von engl. *general*).  $X$  gibt die Verteilung der Zeit zwischen zwei ankommenden Jobs an, während  $Y$  für die Verteilung der eigentlichen Bearbeitungszeit eines Jobs auf dem Server steht (ohne Wartezeit).

### 3.2.1 M/M/1-Warteschlangen

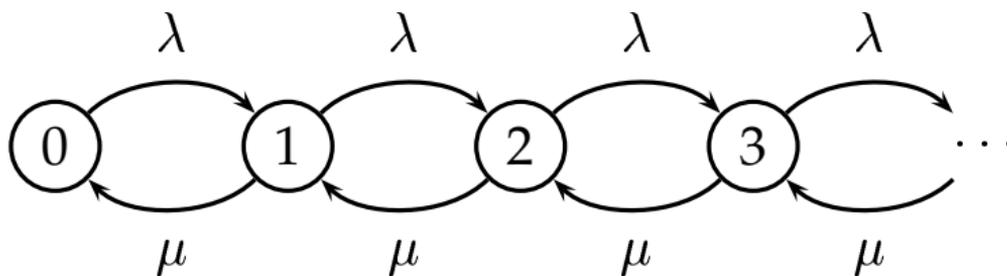


Abbildung: Modellierung einer M/M/1-Warteschlange

Diese Markov-Kette ist irreduzibel, und im Gleichgewichtszustand gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned}0 &= \lambda\pi_{k-1} + \mu\pi_{k+1} - (\lambda + \mu)\pi_k \text{ für alle } k \geq 1 \\0 &= \mu\pi_1 - \lambda\pi_0.\end{aligned}$$

Wir definieren die **Verkehrsdichte**  $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$  und erhalten:

$$\pi_k = \rho\pi_{k-1} = \dots = \rho^k\pi_0.$$

Damit:

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \pi_0 \cdot \frac{1}{1 - \rho} \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho.$$

Dabei haben wir angenommen, dass  $\rho < 1$  ist. Für  $\rho \geq 1$  konvergiert das System nicht. Da in diesem Fall  $\lambda \geq \mu$  gilt, kommen die Jobs schneller an, als sie abgearbeitet werden können. Intuitiv folgt daraus, dass die Warteschlange immer größer wird.

Für  $\rho < 1$  erhalten wir als Endergebnis

$$\pi_k = (1 - \rho)\rho^k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Aus diesem Resultat können wir einige interessante Schlussfolgerungen ziehen. Zunächst betrachten wir die Zufallsvariable

$N :=$  Anzahl der Jobs im System (wartend + in Bearbeitung).

Für  $N$  gilt (die Berechnung von  $\mathbb{E}[N]$  und  $\text{Var}[N]$  erfolgt mit den schon bei der geometrischen Verteilung in Abschnitt 3 verwendeten Summenformeln)

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k \geq 0} k \cdot \pi_k = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad \text{und} \quad \text{Var}[N] = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}. \quad (15)$$

Abbildung 4 zeigt  $\mathbb{E}[N]$  als Funktion von  $\rho$ . Man erkennt, wie das System für  $\rho \rightarrow 1$  divergiert.

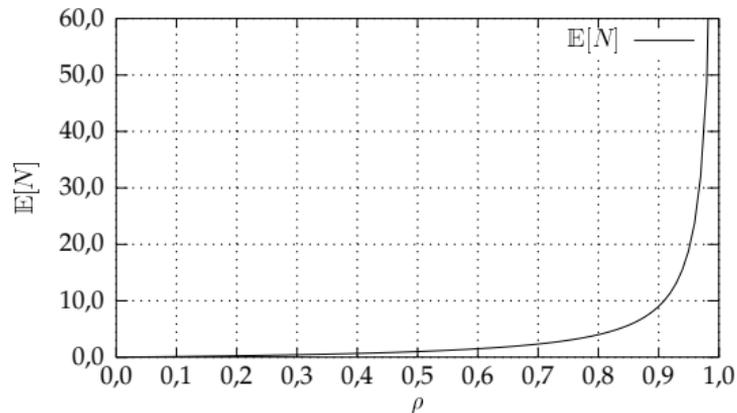


Abbildung: Mittlere Anzahl der Jobs in einer M/M/1-Warteschlange

Für eine weitergehende Analyse der Leistung des Systems definieren wir für den  $i$ -ten Job (bezüglich der Reihenfolge, mit der die Jobs im System ankommen):

$$R_i := \text{Antwortzeit (Gesamtverweildauer im System)}.$$

Der Wert von  $R_i$  hängt natürlich vom Zustand des Systems zur Ankunftszeit des Jobs ab. Betrachten wir das System jedoch im Gleichgewichtszustand, so können wir den Index  $i$  auch weglassen und einfach von der Antwortzeit  $R$  sprechen.

Bei der Berechnung von  $R$  hilft uns der folgende Satz.

### Theorem 156

*(Formel von Little) Für Warteschlangen-Systeme mit mittlerer Ankunftsrate  $\lambda$ , bei denen die Erwartungswerte  $\mathbb{E}[N]$  und  $\mathbb{E}[R]$  existieren, gilt*

$$\mathbb{E}[N] = \lambda \cdot \mathbb{E}[R].$$

*Hierbei werden keine weiteren Annahmen über die Verteilung der Ankunfts- und Bearbeitungszeiten getroffen.*

## Beweis:

[(Skizze)]Wir beobachten das System über einen (langen) Zeitraum (siehe Abbildung 5). In einer Zeitspanne der Länge  $t_0$  seien  $n(t_0)$  Anforderungen eingetroffen.  $N(t)$  gibt die Anzahl der Jobs an, die sich zum Zeitpunkt  $t$  im System befinden. Nun betrachten wir die beiden Größen

$$\sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i \quad \text{und} \quad \int_0^{t_0} N(t) dt.$$

Beide Größen messen „ungefähr“ die in Abbildung 5 grau gefärbte Fläche.



## Beweis (Forts.):

Die rechte Größe misst sogar genau diese Fläche, bei der Summe wird hingegen bei den Jobs, die zur Zeit  $t_0$  noch im System sind, die gesamte Aufenthaltsdauer gezählt, statt nur der Anteil bis zum Zeitpunkt  $t_0$ . Für große  $t_0$  ist der Unterschied dieser beiden Größen aber vernachlässigbar. Führt man daher den Grenzübergang  $t_0 \rightarrow \infty$  durch und normiert beide Größen mit  $1/n(t_0)$ , erhält man

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{n(t_0)} \sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{n(t_0)} \int_0^{t_0} N(t) \, dt \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{t_0}{n(t_0)} \cdot \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} N(t) \, dt. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Mit

$$\bar{R}(t_0) := \frac{1}{n(t_0)} \sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i, \quad \bar{N}(t_0) := \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} N(t) \, dt$$

und  $\bar{\lambda}(t_0) := \frac{n(t_0)}{t_0}$  erhalten wir daraus wegen

$$\lambda = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{n(t_0)}{t_0},$$

$$\mathbb{E}[R] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \bar{R}(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{n(t_0)} \sum_{i=1}^{n(t_0)} R_i \quad \text{und}$$

$$\mathbb{E}[N] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \bar{N}(t_0) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} N(t) \, dt$$

sofort die Behauptung. □

Bei der Berechnung von  $\mathbb{E}[R]$  haben wir verwendet, dass sich für lange Beobachtungszeiträume die relative Häufigkeit immer mehr dem Erwartungswert annähert. Man vergleiche dies mit dem Gesetz der großen Zahlen, Satz 63. Bei den Zufallsvariablen  $R_i$  ist allerdings die Unabhängigkeit nicht gesichert und ein formal korrekter Beweis von  $\mathbb{E}[R] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \bar{R}(t_0)$  würde deshalb aufwändiger.  $\mathbb{E}[N] = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \bar{N}(t_0)$  gilt aufgrund ähnlicher Überlegungen. Die obige Argumentation ist zweifellos ein wenig informell, sie sollte jedoch ausreichen, um die Hintergründe des Satzes zu verdeutlichen.

Mit Satz 156 ist die Berechnung von  $\mathbb{E}[R]$  für die Markov-Kette aus Abbildung 3 kein Problem mehr. Aus (15) folgt

$$\mathbb{E}[R] = \frac{\mathbb{E}[N]}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}. \quad (16)$$

Manchmal sieht man statt  $R$  auch die leicht abgewandelte Größe

$$W := (\text{reine}) \text{Wartezeit.}$$

Wegen der Linearität des Erwartungswerts ist die Berechnung von  $\mathbb{E}[W]$  für M/M/1-Warteschlangen kein Problem:

$$\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[R] - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}. \quad (17)$$

### 3.3 Birth-and-Death Prozesse

M/M/1-Warteschlangen stellen einen Spezialfall so genannter **Birth-and-Death Prozesse** dar. Darunter versteht man kontinuierliche Markov-Ketten mit einem Übergangdiagramm der in Abbildung 6 angegebenen Form.

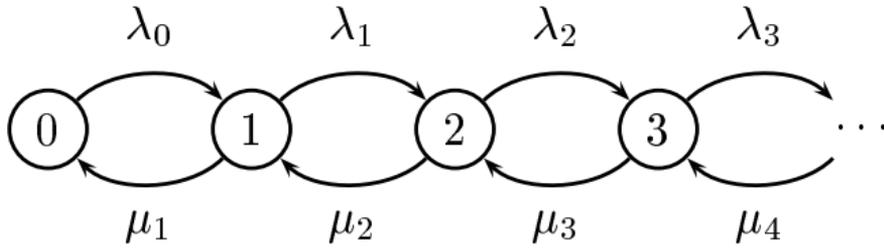


Abbildung: Ein Birth-and-Death Prozess

Bei solchen Prozessen erhalten wir das folgende Gleichungssystem für den Gleichgewichtszustand:

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_{k-1}\pi_{k-1} + \mu_{k+1}\pi_{k+1} - (\lambda_k + \mu_k)\pi_k \quad \text{für alle } k \geq 1, \\0 &= \mu_1\pi_1 - \lambda_0\pi_0.\end{aligned}$$

Dieses System können wir mit derselben Technik wie bei den M/M/1-Warteschlangen auflösen und erhalten

$$\pi_k = \pi_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \quad \text{für alle } k \geq 1. \quad (18)$$

Die Normierungsbedingung  $\sum_{k \geq 0} \pi_k = 1$  liefert

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k \geq 1} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}, \quad (19)$$

sofern  $\sum_{k \geq 1} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$  nicht divergiert. Ansonsten hat das Gleichungssystem wiederum nur die triviale Lösung  $\pi_0 = \pi_1 = \dots = 0$ .

Viele interessante Probleme lassen sich einfach als Birth-and-Death Prozess modellieren. Wir betrachten zwei Beispiele.

### Beispiel 157

Abbildung 7 zeigt eine M/M/1-Warteschlange mit beschränktem Warteraum. Dieser liegt das Modell zu Grunde, dass ankommende Jobs nur dann ins System aufgenommen werden, wenn im aktuellen Zustand weniger als  $N$  Jobs auf ihre Bearbeitung warten. Neben den klassischen Beispielen einer Arztpraxis oder Ähnlichem ist dieses Modell auch für viele Probleme in der Informatik zutreffend, da hier für die Verwaltung der auf Bearbeitung wartenden Jobs oft fest dimensionierte Arrays vorgesehen werden.

## Beispiel

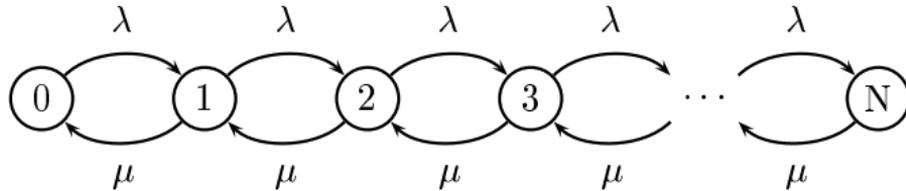


Abbildung: M/M/1-Warteschlange mit beschränktem Warteraum

## Beispiel

Die Verteilung im Gleichgewichtszustand erhalten wir sofort, in dem wir in (18) und (19) die entsprechenden Werte für  $\lambda_i$  und  $\mu_i$  einsetzen:

$$\pi_k = \rho^k \cdot \pi_0 \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq N \text{ mit } \rho = \lambda/\mu$$

und

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^N \rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^N \rho^i} = \begin{cases} \frac{1}{N+1} & \text{für } \rho = 1, \\ \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

In diesem Fall konvergiert das System für alle Werte von  $\rho$  in einen stationären Zustand. Auch für  $\rho \geq 1$  kann die Warteschlange nicht beliebig lang werden, da im Zustand  $N$  keine weiteren Jobs mehr entgegengenommen werden. Für  $\rho < 1$  und  $N \rightarrow \infty$  konvergiert das System gegen eine „normale“ M/M/1-Warteschlange.

## Beispiel 158

Wir modellieren ein Anfragesystem mit einem einzelnen Server, an den  $M$  Terminals angeschlossen sind. An den Terminals treffen Anfragen mit der Rate  $\lambda$  ein und werden an den Server weitergeleitet. Wenn ein Terminal eine Anfrage abgeschickt hat, die noch nicht bearbeitet wurde, so bleibt es blockiert, bis es eine Antwort vom Server erhalten hat.

Wir stellen dieses System durch eine kontinuierliche Markov-Kette dar, deren Zustände  $S = \{0, \dots, M\}$  der Anzahl von Anfragen entsprechen, die gerade beim Server in Bearbeitung sind (die Bearbeitungsrate bezeichnen wir wieder wie gewohnt mit  $\mu$ ). Im Zustand 0 treffen beim Server Anfragen mit der Rate  $M\lambda$  ein, da sich die Anfragen aller  $M$  Terminals addieren. Im Zustand  $i$  warten  $i$  Terminals auf Antwort vom Server und sind deshalb blockiert. Somit muss der Server nur noch eine Anfragerate von  $(M - i)\lambda$  entgegennehmen. Abbildung 8 zeigt das resultierende System.

## Beispiel

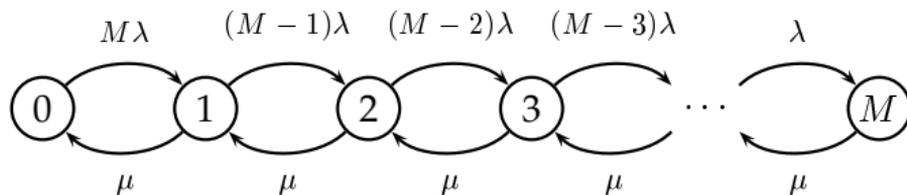


Abbildung: Markov-Kette zu einem Server mit  $M$  Terminals

## Beispiel

Auch hier finden wir die stationäre Verteilung durch Einsetzen der entsprechenden Werte für  $\lambda_i$  und  $\mu_i$  in (18) und (19):

$$\pi_k = \pi_0 \cdot \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda(M-i)}{\mu} = \pi_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot M^{\underline{k}} \quad \text{für alle } k \geq 1$$

und

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot M^{\underline{k}}}.$$

Hierbei bezeichnet  $M^{\underline{k}} := M(M-1)\dots(M-k+1)$  die  $k$ -te fallende Faktorielle von  $M$  (siehe Vorlesung DS).