

2. Definitionen für ungerichtete Graphen

Falls nicht explizit anders gesagt, sind in diesem Abschnitt alle betrachteten Graphen als *einfach* vorausgesetzt.

2.1 Pfade und Kreise

Definition 253

Ein **Pfad (Weg)** in einem Graphen ist eine Folge von Knoten v_0, v_1, \dots, v_k mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E, i = 0, \dots, k - 1$.

Ein Pfad heißt **einfach**, wenn alle v_i paarweise verschieden sind.

Ein **Kreis** ist ein Pfad, bei dem gilt: $v_0 = v_k$.

Ein Kreis heißt **einfach**, wenn die Knoten v_0, \dots, v_{k-1} paarweise verschieden sind.

2.2 Isomorphe Graphen

Definition 254

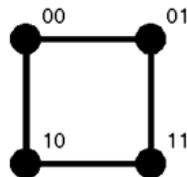
Zwei Graphen $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2$ heißen **isomorph**, falls es eine Bijektion $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ gibt, so dass gilt:

$$(\forall v, w \in V_1) \left[\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2 \right].$$

Beispiel 255

$K_{2,2} \cong C_4 \cong Q_2$ oder $T_{4,4,4} \cong Q_6$

Beispiel 256



Q_2

2.3 Adjazenz

Definition 257

Sei $G = (V, E)$, $u, v \in V$ und $\{u, v\} \in E$. Dann heißen u und v **adjazent** (aka **benachbart**). u und v sind **Endknoten** von $\{u, v\}$; u und v sind **inzident** zur Kante $\{u, v\}$. Zwei Kanten heißen **adjazent**, falls sie einen Endknoten gemeinsam haben.

2.4 Nachbarschaft

Definition 258

Sei $u \in V$.

$$N(u) := \{v \in V; u \neq v, \{u, v\} \in E\}$$

heißt die **Nachbarschaft** von u .

$d(u) := \deg(u) := |N(u)|$ heißt **Grad** von u .

Falls $d(u) = 0$, so heißt u **isoliert**.

2.5 Gradfolge

Definition 259

Sei $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ o.B.d.A. so, dass

$$d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n).$$

Dann heißt $(d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n))$ die **Gradfolge** von G .

Bemerkung:

Isomorphe Graphen haben dieselbe Gradfolge.

Satz 260

Sei $G = (V, E)$. Dann gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis:

$\sum d(v)$ zählt Halbkanten.



Korollar 261

In jedem Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

2.6 Reguläre Graphen

Definition 262

Ein Graph $G = (V; E)$ heißt k -regulär genau dann, wenn

$$(\forall v \in V) [d(v) = k].$$

Beispiel 263

Q_k ist k -regulär; T_{m_1, \dots, m_k} ist $2k$ -regulär.

2.7 Teilgraphen

Definition 264

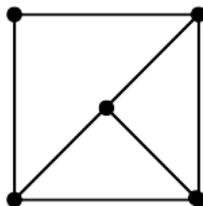
- ① $G' = (V', E')$ heißt **Teilgraph** von $G = (V, E)$, falls

$$V' \subseteq V \quad \wedge \quad E' \subseteq E.$$

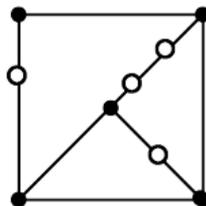
- ② Ein Graph $H = (\bar{V}, \bar{E})$ heißt **Unterteilung** von $G = (V, E)$, falls H aus G dadurch entsteht, dass jede Kante $\{v, w\} \in E$ durch einen Pfad $v = \bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k = w$ ersetzt wird. Dabei sind $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}$ jeweils neue Knoten.

Beispiel 265 (Unterteilung)

G:



H:



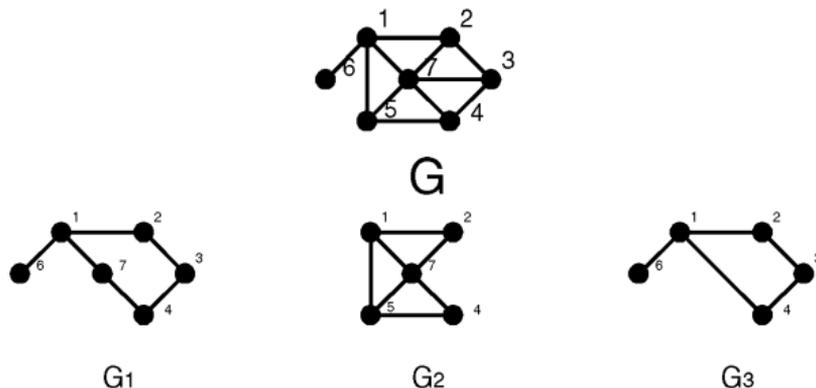
Bemerkung: (Satz von Kuratowski) Ein Graph ist genau dann nicht planar, wenn er eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ als Teilgraph enthält.

2.8 Induzierte Teilgraphen

Definition 266

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt **(knoten-)induzierter Teilgraph** von $G = (V, E)$, falls G' Teilgraph von G ist und $E' = E \cap (V' \times V')$.

Beispiel 267

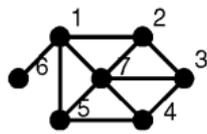


G_1 ist Teilgraph von G , aber nicht knoteninduziert; G_2 ist der von $\{1, 2, 4, 5, 7\}$ induzierte Teilgraph; G_3 ist nicht Teilgraph von G .

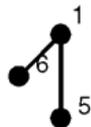
Sei $V' \subseteq V$. Dann bezeichnet $G \setminus V'$ den durch $V \setminus V'$ induzierten Teilgraphen von G .

Beispiel 268

$$G_4 = G \setminus \{2, 3, 4, 7\}$$



G



G₄

2.9 Erreichbarkeit

Definition 269

Sei $G = (V, E)$; $u, v \in V$. v heißt von u aus in G **erreichbar**, falls G einen Pfad mit Endknoten u und v enthält.

Satz 270

Die Relation $R \subseteq V \times V$ mit

$$uRv \iff \text{„}v \text{ ist von } u \text{ aus in } G \text{ erreichbar“}$$

ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, dass R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. □

2.10 Zusammenhangskomponenten

Die Äquivalenzklassen der Erreichbarkeitsrelation heißen **Zusammenhangskomponenten** von G . G heißt **zusammenhängend**, falls G aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

2.11 Bäume

Definition 271

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **Baum**, falls G zusammenhängend und kreisfrei ist.

Satz 272

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

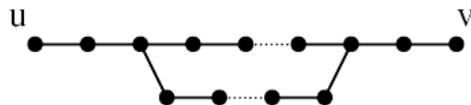
- 1 $G = (V, E)$ ist ein nichtleerer Baum.
- 2 $V \neq \emptyset$ und für je zwei Knoten $u, v \in V$ mit $u \neq v$ gibt es genau einen einfachen Pfad zwischen u und v .
- 3 G ist zusammenhängend und $|V| = |E| + 1$.

Beweis:

1. \Rightarrow 2.

Seien $u, v \in V$, $u \neq v$. Da G zusammenhängend ist, muss mindestens ein Pfad zwischen u und v existieren.

Widerspruchsannahme: Es gibt zwei verschiedene Pfade zwischen u und v .



Dann gibt es einen Kreis in G , was einen Widerspruch zur Annahme darstellt.

Beweis (Forts.):

2. \Rightarrow 3. Beweis durch Induktion:

Dass G zusammenhängend und V nichtleer sein muss, ist klar. Für $|E| = 0$ gilt $|V| = 1$ (Induktionsanfang).

G muss einen Knoten mit Grad 1 enthalten: Wähle $u \in V$ beliebig. Wähle einen Nachbarn u_1 von u . Falls $\deg(u_1) > 1$, wähle einen Nachbarn $u_2 \neq u$ von u_1 usw. Da V endlich und G zusammenhängend und kreisfrei ist (sonst gäbe es ein Knotenpaar mit zwei verschiedenen einfachen Pfaden dazwischen), kommt man so schließlich zu einem Blatt (Knoten mit Grad 1).

Entfernt man dieses Blatt (sowie die inzidente Kante) und wendet auf den entstehenden Graphen die IV an, erhält man:

$$(|V| - 1) - 1 = |E| - 1$$

Damit ist bewiesen, dass $|V| = |E| + 1$.

Beweis (Forts.):

3. \Rightarrow 1.

Sei nun G zusammenhängend mit $|V| = |E| + 1$.

Zu zeigen: G ist kreisfrei.

Widerspruchsannahme: G enthält einen einfachen Kreis $C = (V_C, E_C)$.

Da wir G aufbauen können, indem wir die Knoten in $V \setminus V_C$ mit jeweils **einer** neuen Kante hinzufügen und zum Schluss noch eventuell übrig gebliebene Kanten hinzufügen, gilt:

$$|V| = |V_C| + |V \setminus V_C| \leq |E_C| + |E \setminus E_C| = |E|$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $|V| = |E| + 1$.



Korollar 273

Seien $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| = n$ und (d_1, d_2, \dots, d_n) die Gradfolge von T , dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2 \cdot |E| = 2n - 2$$

2.12 Spannbäume

Definition 274

Ein Teilgraph $T = (V', E')$ von $G = (V, E)$ heißt **Spannbaum** von G , falls T ein Baum und $V' = V$ ist.

Satz 275 (Arthur Cayley, 1889)

Sei $t(n)$ die Anzahl der verschiedenen markierten Bäume mit Knotenmenge $\{1, \dots, n\}$.
Dann gilt:

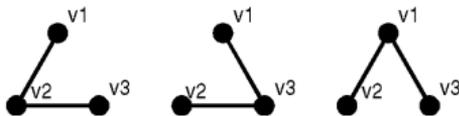
$$t(n) = n^{n-2}$$

Beispiel 276

• $n = 2$:



• $n = 3$:



Beispiel (Forts.)

- $n = 4$:

