

## Beispiel 225

Sei  $(a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 2)$  und

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} \quad \forall n \geq 3$$

(also  $(a_i)_{i \geq 0} = (0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots)$ ). Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 + x - 1 = 0 &= (x - 1)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x - i)(x + i). \end{aligned}$$

Setze nun  $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot i^n + c_3 \cdot (-i)^n$ . Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man dann  $c_1 = 1$  und  $c_2 = c_3 = -\frac{1}{2}$ , also

$$a_n = 1 - \frac{1}{2}(i^n + (-i)^n).$$

## Satz 226

Sei  $(q_1, q_2, \dots, q_d)$  eine gegebene Folge,  $q_i \in \mathbb{C}$ ,  $d \geq 1$ ,  $q_d \neq 0$ . Sei weiter

$$q(z) := 1 + q_1z + q_2z^2 + \dots + q_dz^d$$

Das *reflektierte Polynom* dazu ist

$$q^R(z) := z^{\deg(q)} \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^d + q_1z^{d-1} + q_2z^{d-2} + \dots + q_d$$

(Bemerkung:  $q^R(z)$  ist das *charakteristische Polynom*). Seien  $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq k}$  die verschiedenen Nullstellen von  $q^R$ , sei  $d_i$  die Vielfachheit von  $\alpha_i$ . Damit ist

$$\sum_{i=1}^k d_i = d.$$

## Satz 226 (Forts.)

Gelten diese Bedingungen, so sind für eine Folge  $(f_n)_{n \geq 0}$ , mit

$$F(z) := \sum_{n \geq 0} f_n z^n$$

der zugehörigen Erzeugendenfunktion, die folgenden Aussagen äquivalent:

- ① **Lineare Rekursion:** ( $d$  ist die *Ordnung* der Rekursion)

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[ f_{n+d} + q_1 \cdot f_{n+d-1} + q_2 \cdot f_{n+d-2} + \dots + q_d \cdot f_n = 0 \right]$$

- ② **Erzeugende Funktion:**

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

für ein Polynom  $p(z)$  vom Grad  $< d$ .

## Satz 226 (Forts.)

- ③ **Partialbruchzerlegung:** *Es gibt Polynome  $g_i$ ,  $\deg(g_i) < d_i$  für  $i = 1, \dots, k$ , so dass*

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$$

- ④ **Explizite Darstellung:** *Es gibt Polynome  $p_i$ ,  $\deg(p_i) < d_i$ , so dass*

$$(\forall n \geq 0) \left[ f_n = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n \right]$$

## Beweis:

Betrachte die komplexen Vektorräume

$$V_k = \{(f_n)_{n \geq 0} : (f_n)_{n \geq 0} \text{ erfüllt Eigenschaft } k\}$$

mit  $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Es gilt:

$$\dim(V_1) = d$$

$$\dim(V_2) = d \text{ (} p \text{ hat } d \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_3) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} g_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

$$\dim(V_4) = \sum_{i=1}^k d_i = d \text{ (} p_i \text{ hat } d_i \text{ frei wählbare Koeffizienten)}$$

Um zu zeigen  $V_i = V_j$ , genügt es daher,  $V_i \subseteq V_j$  zu zeigen.

## Beweis (Forts.):

- $V_1 = V_2$ : Sei  $(f_n)_{n \geq 0} \in V_2$ . Wir wissen, dass

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist

$$\tilde{F}(z) = (1 + q_1 z + q_2 z^2 + \dots + q_d z^d) \cdot \sum_{n \geq 0} f_n z^n = p(z)$$

mit  $\deg(p) \leq d - 1$ , also  $[z^{d+n}]p(z) = 0$  für alle  $n \geq 0$ . Betrachte für  $n \geq 0$

$$[z^{d+n}]\tilde{F}(z) = f_{n+d} + f_{n+d-1}q_1 + \dots + f_n q_d = 0.$$

Damit gilt, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_1,$$

also  $V_2 \subseteq V_1$ , und damit  $V_1 = V_2$ .

## Beweis (Forts.):

- $V_2 = V_3$ : Sei  $(f_n)_{n \geq 0} \in V_3$ , also

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}.$$

Zu zeigen ist, dass

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Betrachte hierzu

$$\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}.$$

Wir wissen, dass

$$q^R(z) = \prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}.$$

Beweis (Forts.):

Weiter gilt, dass

$$q^R(z) = z^d \cdot q\left(\frac{1}{z}\right),$$

also

$$\begin{aligned} q(z) &= \left(q^R(z)\right)^R = \left(\prod_{i=1}^k (z - \alpha_i)^{d_i}\right)^R \\ &= z^d \cdot \prod_{i=1}^k \left(\frac{1}{z} - \alpha_i\right)^{d_i} \\ &= \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}. \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Daraus erhält man (durch Bilden des Hauptnenners)

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^k \left( g_i(z) \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (1 - \alpha_j z)^{d_j} \right)}{\prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Es ist damit

$$\deg(p(z)) < d_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k d_j = d,$$

also  $V_3 \subseteq V_2$  und damit  $V_2 = V_3$ .

- $V_3 = V_4$ : Sei

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_3.$$

Zu zeigen ist, dass

$$(f_n)_{n \geq 0} \in V_4.$$

Es gilt, dass

$$F(z) = \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} \quad \deg(g_i(z)) < d_i .$$

Aus Satz 222 (5) (Folie 6) wissen wir, dass

$$\frac{1}{(1-x)^c} = \sum_{n \geq 0} \binom{c+n-1}{n} \cdot x^n .$$

Damit gilt, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot (\alpha_i z)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{d_i + n - 1}{n} \cdot \alpha_i^n z^n .\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Mit

$$g_i(z) = g_{i,0} + g_{i,1}z + \dots + g_{i,d_i-1}z^{d_i-1} = \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j}z^j$$

gilt:

$$\frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^{d_i-1} g_{i,j} \cdot \binom{d_i + n - j - 1}{n - j} \cdot \alpha_i^{n-j} \right) \cdot z^n$$

## Beweis (Forts.):

Also gilt auch, dass

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{i=1}^k \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \underbrace{\sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{d_i-1} \alpha_i^{-j} \cdot g_{i,j} \cdot \binom{n + d_i - j - 1}{d_i - 1} \cdot \alpha_i^n}_{p_i(n)} \right) \cdot z^n \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$f_n = [z^n]F(z) = \sum_{i=1}^k p_i(n) \cdot \alpha_i^n .$$

Es gilt, dass  $\deg(p_i(n)) \leq d_i - 1$ , und damit ist auch  $(f_n)_{n \geq 0} \in V_4$ , also  $V_3 = V_4$ .  $\square$

**Anwendung:** Sei eine homogene Rekursion gegeben, z. B.

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

- ① Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus, inklusive der Anfangsbedingungen. Wie immer ist  $F_n = 0$  für  $n < 0$ .  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  gilt auch für  $n = 0$ , aber für  $n = 1$  ist  $F_1 = 1$ , die rechte Seite jedoch 0. Also ist die vollständige Rekursion

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + \delta_{n,1},$$

mit

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- 2 Interpretiere die Gleichung aus 1. mit Hilfe von erzeugenden Funktionen. Wir wissen schon, dass Indexerniedrigung einer Multiplikation mit einer Potenz von  $z$  entspricht. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_n z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-1} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_{n-2} z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{n,1} z^n \\ &= z \cdot F(z) + z^2 \cdot F(z) + z \end{aligned}$$

- 3 Löse die Gleichung in  $F(z)$ . Das ist leicht:

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

- 4 Drücke die rechte Seite als formale Reihe aus und ermittle daraus die Koeffizienten. Dies ist der schwierigste Schritt. Zunächst schreiben wir  $1 - z - z^2$  in der Form  $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$  und ermitteln dann durch Partialbruchzerlegung die Konstanten  $a$  und  $b$ , so dass gilt:

$$\frac{1}{(1 - \alpha z)(1 - \beta z)} = \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z}.$$

Es ergibt sich z.B.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(z) &= z \left( \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z} \right) \\ &= z \left( a \sum_{n \geq 0} \alpha^n z^n + b \sum_{n \geq 0} \beta^n z^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} (a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}) z^n \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} F_n &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \end{aligned}$$

nachdem man die Konstanten  $a$  und  $b$  etwa aus den Gleichungen für  $F_0$  und  $F_1$  bestimmt hat.

## 4.12 Das Master-Theorem

Bei der Analyse von **Divide-and-Conquer**-Verfahren stößt man oft auf Rekursionen, die sich nicht als lineare Rekursionen formulieren lassen. So führt der Mergesort-Algorithmus in der Standardvariante zu der Rekursionsgleichung

$$C_n = C_{\lfloor n/2 \rfloor} + C_{\lceil n/2 \rceil} + n \quad \text{für alle } n > 1 \quad \text{und } C_1 = 0.$$

Löst man allgemein ein Problem der Größe  $n$  dadurch, dass man es in  $a$  Teilprobleme der Größe höchstens  $n/b$  aufteilt, so erhält man für die Laufzeit  $T(n)$  eine Rekursion der Form

$$T(n) \leq a \cdot T(n/b) + f(n) ,$$

wobei  $f(n)$  die Laufzeit für die Aufteilung in Teilprobleme und für das Zusammenfügen der Lösungen der Teilprobleme ist.