

## 4.7.2 Stirling-Zahlen der ersten Art

### Lemma 185

Mit den zusätzlichen Festlegungen

$$s_{0,0} = 1$$

und

$$s_{n,k} = 0 \quad k \leq 0, n > 0$$

gilt:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \quad \forall n, k > 0.$$

Beweis:

Für Permutationen auf  $\{1, \dots, n\}$  mit  $k$  Zyklen gilt:

Entweder:  $n$  bildet einen Zyklus der Länge 1:

$$\pi = \underbrace{(* \cdots *) (* \cdots *) \dots (n)}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{mit } (k-1) \text{ Zyklen}}}$$

Dafür gibt es  $s_{n-1, k-1}$  Möglichkeiten.

Beweis (Forts.):

Oder:  $n$  ist in einem Zyklus der Länge  $\geq 2$  enthalten.

Streiche  $n$  aus dieser Permutation:

$$\pi' = \underbrace{(*\downarrow \dots *\downarrow)(*\downarrow \dots *\downarrow) \dots (*\downarrow \dots *\downarrow)}_{\substack{\text{Permutation auf} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{mit } k \text{ Zyklen}}}$$

Die  $\downarrow$  bezeichnen Stellen, an denen  $n$  gestrichen worden sein könnte (immer hinter der jeweiligen Zahl, da  $(\downarrow * \dots *)$  zyklisch mit  $(* \dots *\downarrow)$  identisch ist). Dafür gibt es  $n - 1$  mögliche Stellen.

Damit ergeben sich hier  $(n - 1)s_{n-1,k}$  Möglichkeiten.

Die beiden Fälle sind disjunkt, also können die Möglichkeiten addiert werden. □

# Stirling-Dreieck der ersten Art

$s_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \quad \forall n, k > 0$$

Es gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left[ x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \right].$$

Beweis:

(Vollständige Induktion)

Induktionsanfang:  $n = 0$

$$x^0 = 1 \stackrel{!}{=} \sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} s_{0,k} \cdot x^k = s_{0,0} = 1$$

## Beweis (Forts.):

Induktionsschluss:  $n \mapsto n + 1$

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= (x - n) \cdot x^n \\ &\stackrel{\text{IA}}{=} (x - n) \cdot \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k+1} \cdot n \cdot s_{n,k} \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k+1} \cdot (s_{n,k-1} + n \cdot s_{n,k}) \cdot x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \cdot s_{n+1,k} \cdot x^k\end{aligned}$$



### 4.7.3 Stirling-Zahlen der zweiten Art

#### Lemma 186

Es gilt:

$$\forall n, k \in \mathbb{N}_0 \quad S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} .$$

Beweis:

Sei  $N = \{1, \dots, n\}$ .

In einer Partition von  $N$  in  $k$  Teilmengen gilt

**entweder:**  $\{n\}$  tritt als solches in der Partition auf:

$$\underbrace{N_1 \uplus N_2 \uplus \dots \uplus N_{k-1}}_{\substack{\text{Partition von} \\ \{1, \dots, n-1\} \\ \text{in } (k-1) \text{ Teilmengen}}} \uplus \{n\}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k-1}$  Möglichkeiten

Beweis (Forts.):

oder:  $n$  ist in einem  $N_i$  mit  $\geq 2$  Elementen enthalten:

$$N_1 \uplus N_2 \uplus \dots \uplus N_k$$

Streiche  $n$ . Betrachte:

$$\underbrace{N_1 \setminus \{n\} \uplus N_2 \setminus \{n\} \uplus \dots \uplus N_k \setminus \{n\}}_{\text{Partition von } \{1, \dots, n-1\} \text{ in } k \text{ Klassen}}$$

$\Rightarrow S_{n-1,k}$  Möglichkeiten.  $n$  kann an einer von  $k$  Stellen entfernt worden sein:

$\Rightarrow$  insgesamt  $k \cdot S_{n-1,k}$  Möglichkeiten in diesem Fall. □

# Stirling-Dreieck der zweiten Art

$S_{n,k}$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	1	3	1			
4	0	1	7	6	1		
5	0	1	15	25	10	1	
6	0	1	31	90	65	15	1

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

## Einige Eigenschaften:

$$S_{n,1} = 1$$

$$S_{n,2} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$$

$$S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$$

$$S_{n,n} = 1$$

**Bemerkung:**

Es gibt auch andere Notationen für die Stirling-Zahlen zweiter Art, z. B.:

$$S_{n,k} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

z. B. in Graham, Knuth, Pataschnik: Concrete Mathematics

## 4.7.4 Auflistung von Permutationen

### Definition 187

Seien  $\pi = (\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n)$  und  $\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n)$  zwei Permutationen aus  $S_n$ ,  $\pi \neq \sigma$ , als Wertevektor geschrieben (d.h.  $\pi_i = \pi(i)$  etc.). Dann heißt  $\pi$  **lexikographisch kleiner als**  $\sigma$ , geschrieben  $\pi < \sigma$ , genau dann, wenn

$$(\exists 1 \leq k \leq n)(\forall 1 \leq i < k) \left[ (\pi_i = \sigma_i) \wedge (\pi_k < \sigma_k) \right].$$

### Beispiel 188

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$ :

$$(1 \ 2 \ 3) < (1 \ 3 \ 2) < (2 \ 1 \ 3) < (2 \ 3 \ 1) < (3 \ 1 \ 2) < (3 \ 2 \ 1)$$

## Algorithmus zur Auflistung von $S_n$ in lexikographischer Ordnung:

Gegeben:  $N = \{1, 2, \dots, n\}$

```
appendlexlist(string praefix, set N)
  if N={a} then print(praefix ◦ a)
  else
    for  $k \in N$  in aufsteigender Reihenfolge do
      appendlexlist(praefix ◦  $k$ ,  $N \setminus \{k\}$ )
    od
  fi
end
```

Aufruf:  $\text{appendlexlist}(\lambda, N)$

## Beispiel 189

$n = 3, N = \{1, 2, 3\}$ :

$$(1\ 2\ 3) < (1\ 3\ 2) < (2\ 1\ 3) < (2\ 3\ 1) < (3\ 1\ 2) < (3\ 2\ 1)$$

## 4.7.5 Auflistung von Teilmengen

Sei  $N = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ ,  $|N| = n$ .

### Definition 190

Seien  $A, B \subseteq N$ ,  $A \neq B$ . Dann heißt  $A$  **lexikographisch kleiner als**  $B$ , geschrieben  $A < B$ , wenn

$$\max\{A \Delta B\} \in B$$

### Beispiel 191

$N = \{0, 1, 2\}$ ;

$$2^N = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{1, 0\}, \{2\}, \{2, 0\}, \{2, 1\}, \{2, 1, 0\}\}$$

## Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung:

- 1  $N = \{0, \dots, n - 1\}$ . Zähle die natürlichen Zahlen von 0 bis  $2^n - 1$  in Binärschreibweise auf, fülle jede Binärzahl dabei mit führenden Nullen auf  $n$  Stellen auf.
- 2 Sei  $a = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$  ein Element der obigen Folge. Dann entspricht  $a$  die Teilmenge

$$N_a = N_{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0} = \left\{ k \in N : 0 \leq k \leq n - 1 \wedge a_k = 1 \right\}$$

## Algorithmus zur Auflistung aller Teilmengen in lexikographischer Ordnung, zweite Variante:

Sei  $n \in \mathbb{N}$ .

```
appendlexlist(set praefix, nat n)
  for k = 0, 1 do
    if k = 1 then praefix:=praefix  $\cup$  {n} fi
    if n = 0 then print(praefix)
    else
      appendlexlist(praefix, n - 1)
    fi
  od
end
```

Aufruf:  $\text{appendlexlist}(\emptyset, n - 1)$

## 4.7.6 Gray-Codes

### Definition 192

Ein **Gray-Code**  $GC(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ist eine Permutation  $(g_0, \dots, g_{2^n-1})$  der Wörter in  $\{0, 1\}^n$ , so dass sich zwei aufeinanderfolgende Wörter  $g_i$  und  $g_{i+1}$ , für alle  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ , in genau einer Position unterscheiden.

$GC(n)$  heißt **zyklischer Gray-Code**, falls die Bedingung auch für  $g_{2^n-1}$  und  $g_0$  gilt.

$$GC(1) := (g_{1,0}, g_{1,1}) = (0, 1)$$

$$GC(n+1) := (0 \cdot g_{n,0}, 0 \cdot g_{n,1}, \dots, 0 \cdot g_{n,2^n-1}, \\ 1 \cdot g_{n,2^n-1}, \dots, 1 \cdot g_{n,0})$$

### Beispiel 193

$$GC(3) = (000 \ 001 \ 011 \ 010 \ 110 \ 111 \ 101 \ 100)$$

## Lemma 194

- 1  $GC(n)$  hat Länge  $2^n$ .
- 2  $\{g_{n,0}, \dots, g_{n,2^n-1}\} = \{0, 1\}^n$ .
- 3 für alle  $k$  unterscheidet sich  $g_{n,k}$  von  $g_{n,(k+1) \bmod 2^n}$  in genau **einem** Bit.

Beweis:

Folgt direkt aus der Definition.

