

De Morgan'sche Regeln

Durch Auswerten der Wahrheitwertetabelle stellen wir fest, dass

$$(p \vee q) \equiv \overline{\overline{p} \wedge \overline{q}}$$

allgemeingültig ist; ebenso

$$(p \wedge q) \equiv \overline{\overline{p} \vee \overline{q}}.$$

Diese beiden Tautologien werden als die **De Morgan'schen Regeln** bezeichnet, benannt nach **Augustus de Morgan** (1806–1871).

Modus Ponens

Durch Auswerten der Wahrheitstabelle stellen wir ebenfalls fest, dass

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

allgemeingültig ist.

Intuitiv bedeutet dies, dass wir, falls wir wissen, dass $p \Rightarrow q$ wahr ist (d.h., aus p (aussagenlogisch) stets q folgt) und dass auch p gilt, die Gültigkeit von q folgern können.

Dieses Prinzip des Modus Ponens wird in Beweisen sehr häufig verwendet.

Wichtige Bemerkung:

Ist eine boolesche Formel $F(x_1, \dots, x_n)$ mit den Variablen x_1, \dots, x_n allgemeingültig, und sind F_1, \dots, F_n boolesche Formeln (mit den Variablen x_1, \dots, x_r), dann ist auch

$$F(F_1, \dots, F_n)$$

allgemeingültig (mit den Variablen x_1, \dots, x_r).

Quantoren

Sei $F(p, q, \dots)$ eine boolesche Formel mit den Variablen p, q, \dots . Manchmal (oder auch öfters) wollen wir (aus F abgeleitete) Eigenschaften G ausdrücken, die aussagen, dass

- 1 es eine Belegung für p gibt, so dass dann die resultierende Formel gilt, also

$$G(q, \dots) = F(0, q, \dots) \vee F(1, q, \dots);$$

- 2 für jede Belegung von p dann die resultierende Formel gilt, also

$$H(q, \dots) = F(0, q, \dots) \wedge F(1, q, \dots);$$

Hierfür verwenden wir die folgende Notation:

- 1 $G(q, \dots) = (\exists p)[F(p, q, \dots)]$
- 2 $H(q, \dots) = (\forall p)[F(p, q, \dots)]$

Prädikatenlogik

Oft wollen wir Eigenschaften betrachten, die Elemente über einem anderen Universum als das der booleschen Werte \mathbb{B} betreffen.

Sei \mathcal{U} ein solches Universum.

Definition 21

- Ein **Prädikat** P über \mathcal{U} ist eine Teilmenge von \mathcal{U}^n , für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}_0$.
- Die Formel $P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{B}$ ist **true** gdw (x_1, \dots, x_n) Element der entsprechenden Teilmenge ist.

Beispiel 22

Sei das Universum die Menge $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, sei $P(n)$ das Prädikat „ $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist prim“, und sei „ $<$ “ das Prädikat „kleiner als“ (geschrieben in Infix-Notation), dann bedeutet

- $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \exists p \in \mathbb{N} \setminus \{1\})[P(p) \wedge (p > n)]$
„Es gibt unendlich viele Primzahlen!“
- $(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \exists p, q \in \mathbb{N} \setminus \{1\})[p > n \wedge P(p) \wedge q = p + 2 \wedge P(q)]$
„Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge!“

Bemerkungen:

- 1 Die Bedeutung von \equiv (und damit $\not\equiv$) ist klar. \equiv wird oft, vor allem in Beweisen, auch als

\Leftrightarrow

geschrieben (im Englischen: iff, if and only if).

- 2 Für zwei boolesche Aussagen A und B ist $A \Rightarrow B$ falsch genau dann wenn $A = t$ und $B = f$.
- 3 $A \Rightarrow B$ ist damit äquivalent zu $\neg A \vee B$.
- 4 $A \Rightarrow B$ ist damit auch äquivalent zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Wichtige Beobachtung:

Gilt also (oder beweisen wir korrekt) $A \Rightarrow f$ (also: „aus der Bedingung/Annahme A folgt ein Widerspruch“), so ist A falsch!

4.6 Beweistechniken

Die meisten mathematischen Behauptungen sind von der Form

$$A \Rightarrow B \text{ bzw. } (A_1 \wedge \cdots \wedge A_k) \Rightarrow B.$$

Um $A \Rightarrow B$ zu beweisen, können wir zeigen:

- 1 Unter der Annahme A können wir B zeigen (**direkter Beweis**).
- 2 Unter der Annahme $\neg B$ können wir $\neg A$ zeigen (**indirekter Beweis**).
- 3 Unter den Annahmen $\neg B$ und A können wir einen Widerspruch zeigen (**Widerspruchsbeweis**).

Beispiel 23 (Direkter Beweis)

Satz 24

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis:

$n \in \mathbb{N}_0$ ungerade

$$\Rightarrow (\exists m \in \mathbb{N}_0) [n = 2m + 1] \Rightarrow n^2 = (2m + 1)^2 = \underbrace{4m^2 + 4m}_{\text{gerade}} + 1 \Rightarrow n^2 \text{ ungerade.} \quad \square$$

ungerade

Beispiel 25 (Indirekter Beweis)

Satz 26

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis:

Zunächst überzeugen wir uns (siehe Hausaufgabe), dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)[\text{„}n \text{ gerade“} \equiv \text{„}n + 1 \text{ ungerade“}].$$

Nachdem wir dieses Lemma bewiesen haben, ist die Aussage des Satzes gleichbedeutend mit

„Falls $n \in \mathbb{N}_0$ ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.“

Diese Aussage wurde in Satz 24 bewiesen. □