

1. Berechne für jeden Knoten i in BFS-Art eine Liste S_i von von i aus erreichbaren Knoten, so dass (i) oder (ii) gilt:
 - (i) $|S_i| < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ und S_i enthält alle von i aus erreichbaren Knoten
 - (ii) $|S_i| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$
2. Entsprechende Listen P_i von Vorgängern von i
3. **for** $i := 1$ **to** n **do**

$$L_i^* := S_i \cup \{j; i \in P_j\} \cup \{j; |S_i| = |P_j| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1\}$$
od
 bilde $(L_i^*)^{rr}$ für $i = 1, \dots, n$

Korrektheit: $j \in L_i^*$ gdw (i, j) in transitiver Hülle.

Satz 123

Sei die Wahrscheinlichkeit eines Graphen (lediglich) eine Funktion der Anzahl n seiner Knoten und der Anzahl m seiner Kanten. Dann ist der Erwartungswert für die Laufzeit des obigen Algorithmus $\mathcal{O}(n + m^)$. Dabei ist m^* der Erwartungswert für die Anzahl der Kanten in der transitiven Hülle.*

Beweis:

Das Durchlaufen des Graphen (von v_1 aus für die Konstruktion von S_1) in BFS-Manier liefert eine Folge $(a_t)_{t \geq 1}$ von Knoten. Sei $L_{\sigma(\nu)}$ die ν -te Adjazenzliste, die in der BFS erkundet wird,

$$L_{\sigma(\nu)} = (a_t; h(\nu) < t \leq h(\nu + 1))$$

Sei $\Delta L_{\sigma(\nu)}$ die Menge der a_t in $L_{\sigma(\nu)}$, und sei (für $i = 1$)

$$S_1(t) := \{a_1, a_2, \dots, a_t\}.$$

Wie bereits gezeigt, ist

$$\Pr[j \in L_i] = \frac{m}{n^2}, \quad \forall i, j$$

Beweis (Forts.):

Alle n -Tupel von geordneten Listen L_1, L_2, \dots, L_n mit

$$m = \sum_{i=1}^n |L_i|$$

sind aufgrund der Voraussetzungen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung gleich wahrscheinlich. Also:

Beobachtung 1: Die Mengen $\Delta L_{\sigma(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots$ sind (paarweise) unabhängig.

Beobachtung 2: Die $\Delta L_{\sigma(\nu)}$ sind gleichverteilt, d.h. für alle $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\Pr[\Delta L_{\sigma(\nu)} = A] = \left(\frac{m}{n^2}\right)^{|A|} \left(1 - \frac{m}{n^2}\right)^{n-|A|}$$

Beweis (Forts.):

Lemma 124

Sei $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $|A| = k$. Sei $(\bar{a}_t)_{t \geq 1}$ eine Folge von unabhängigen gleichverteilten Zufallsvariablen mit Wertemenge $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt:

$$\min\{t; \bar{a}_t \notin A\} \text{ hat Erwartungswert } 1 + \frac{k}{n - k}.$$

Beweis:

[des Lemmas] $\Pr[\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r \in A \text{ und } \bar{a}_{r+1} \notin A] = \left(\frac{k}{n}\right)^r \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)$.

Also ist der Erwartungswert für $\min\{t; \bar{a}_t \notin A\}$:

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{r=0}^{\infty} r \left(\frac{k}{n}\right)^r \left(1 - \frac{k}{n}\right) &= 1 + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \sum_{r \geq 1} r \left(\frac{k}{n}\right)^{r-1} \\ &= 1 + \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2} \\ &= 1 + \frac{\frac{k}{n}}{1 - \frac{k}{n}} = 1 + \frac{k}{n - k}. \end{aligned}$$



Anmerkung:

$$\sum_{r=0}^{\infty} r z^{r-1} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Lemma 125

Sei $(\bar{a}_t)_{t \geq 1}$ wie oben, $k \leq \frac{n}{2}$. Dann hat

$\min\{t; |\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_t\}| > k\}$ Erwartungswert $\leq \frac{3}{2}(k+1)$.

Beweis:

[des Lemmas] Wegen der Additivität des Erwartungswertes gilt:

Der gesuchte Erwartungswert ist

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\nu=0}^k \left(1 + \frac{\nu}{n - \nu}\right) \\ &\leq k + 1 + \sum_{\nu=1}^k \frac{\nu}{n} \\ &\leq k + 1 + \frac{k(k+1)}{n} \leq \frac{3}{2}(k+1). \end{aligned}$$



Beweis (Forts.):

Wenn wir jedes $L_{\sigma(\nu)}$ in sich zufällig permutieren, erhalten wir eine Folge $(\bar{a}'_t)_{t \geq 1}$ von Zufallsvariablen, so dass

$$|\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_t\}| = |\{\bar{a}'_1, \dots, \bar{a}'_t\}| \text{ für } t = h(\nu), \quad \forall \nu$$

Da die \bar{a}'_t innerhalb eines jeden Intervalls $h(\nu) < t \leq h(\nu + 1)$ paarweise verschieden sind, gilt für sie die vorhergehende Abschätzung erst recht. Wir betrachten nun aus Symmetriegründen o.B.d.A. lediglich den Knoten $i = 1$. Dann sind $(|S_1(t)|)_{t \geq 1}$ und $(|S_1(t)'|)_{t \geq 1}$ gleichverteilte Folgen von Zufallsvariablen, denn dies gilt zunächst für alle Zeitpunkte der Form $t = h(y)$; da aber für diese Zeitpunkte $S_1(t) = S_1'(t)$ ist und $h(\cdot)$ zufällig verteilt ist, ist auch die Verteilung der beiden Folgen zwischen diesen Intervallgrenzen identisch.

Beweis (Forts.):

Sei s der Erwartungswert und $|S_i|$ die tatsächliche Größe von S_i nach Phase 1. Dann

$$s = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} k \cdot \Pr[|S_i| = k].$$

Die erwartete Anzahl der Schritte (und damit die Kosten) in der BFS sei q . Dann gilt:

$$q \leq \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \Pr[|S_i| = k] \frac{3}{2} k = \frac{3}{2} s.$$

Also ist der Aufwand des Algorithmus für die Phasen 1 und 2 im Erwartungswert $\leq 3sn$. Da $ns \leq m^*$ und die Kosten der anderen Phasen offensichtlich durch $\mathcal{O}(n + m + m^*)$ beschränkt sind, folgt die Behauptung. \square



C.P. Schnorr:

An algorithm for transitive closure with linear expected time

SIAM J. Comput. **7**(2), pp. 127–133 (1978)

9. Matrixmultiplikation à la Strassen

Betrachte das Produkt zweier 2×2 -Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}; \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}$$

Man beachte, dass diese und die folgenden Formeln **nicht** die Kommutativität der Multiplikation voraussetzen. Sie gelten also auch, falls die a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} eigentlich $n \times n$ -Matrizen A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} sind (jeweils $i, j \in \{1, 2\}$).

Bilde:

$$m_1 := (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})$$

$$m_2 := (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$m_3 := (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12})$$

$$m_4 := (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$m_5 := a_{11}(b_{12} - b_{22})$$

$$m_6 := a_{22}(b_{21} - b_{11})$$

$$m_7 := (a_{21} + a_{22})b_{11}$$

Dann gilt:

$$c_{11} := m_1 + m_2 - m_4 + m_6$$

$$c_{12} := m_4 + m_5$$

$$c_{21} := m_6 + m_7$$

$$c_{22} := m_2 - m_3 + m_5 - m_7$$

Sei $n = 2^k$ und $M(n)$ die Anzahl arithmetischer Operationen (Mult, Add, Sub), die Strassen's Algorithmus bei $n \times n$ Matrizen benötigt:

$$M(1) = 1$$

$$M(n) = 7M\left(\frac{n}{2}\right) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Expansion dieser Rekursionsgleichung \Rightarrow

$$\begin{aligned}M(n) &= 7^{k+1} - 6n^2 = 7 \cdot 2^{k \log_2 7} - 6n^2 \\&= 7n^{\log_2 7} - 6n^2 \\&< 7n^{2,80736} - 6n^2 \\&= \mathcal{O}(n^{2,81}).\end{aligned}$$

Der Exponent ω für die Matrixmultiplikation ist also $< 2,81$.

```

proc MATMULT( $A, B, n$ ) =
  co  $A$  und  $B$  sind  $n \times n$  Matrizen oc
  if  $n < 16$  then berechne  $A \cdot B$  mit klassischer Methode
  elif  $n$  gerade then
    spalte  $A$  und  $B$  in je  $4 \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$  Matrizen auf und wende
    Strassen's Formeln an. Führe die Multiplikationen rekursiv
    mit MATMULT aus.
  else
    spalte  $A$  und  $B$  in eine  $(n - 1) \times (n - 1)$  Matrix  $(A_{11}, B_{11})$ 
    und drei verbleibende Blöcke auf. Wende MATMULT rekursiv
    auf  $A_{11}, B_{11}$  an und berechne die anderen Produkte mit der
    klassischen Methode.
  fi

```

Satz 126

Der MATMULT-Algorithmus hat folgende Eigenschaften:

- 1 Für $n < 16$ ist die Anzahl der arithmetischen Operationen genauso hoch wie bei der klassischen Methode.
- 2 Für $n \geq 16$ ist die Anzahl der arithmetischen Operationen echt kleiner als bei der klassischen Methode.
- 3 MATMULT braucht nie mehr als $4,91n^{\log_2 7}$ arithmetische Operationen.

Beweis:

- 1 ✓

Beweis (Forts.):

- ② Sei n gerade und seien A, B zwei $n \times n$ Matrizen. Wir wenden Strassen's Formeln an, führen aber die 7 Multiplikationen der $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ Matrizen mit der klassischen Methode aus.
Gesamtzahl arithmetischer Operationen:

$$7 \left(2 \left(\frac{n}{2} \right)^3 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right) + 18 \left(\frac{n}{2} \right)^2 = \frac{7}{4}n^3 + \frac{11}{4}n^2$$

Dies ist besser als die klassische Methode, falls:

$$\frac{7}{4}n^3 + \frac{11}{4}n^2 < 2n^3 - n^2 \Leftrightarrow \frac{15}{4}n^2 < \frac{1}{4}n^3 \Leftrightarrow 15 < n \Leftrightarrow n \geq 16$$

Sei n ungerade. Multiplizieren wir $A \cdot B$ mit der klassischen Methode, so auch $A_{11} \cdot B_{11}$. Also brauchen wir durch Anwendung von Strassen's Formeln auf die $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen ($n-1$ gerade) weniger Operationen, wenn $n-1 \geq 16$ ist.

Beweis (Forts.):

Sei $M'(n)$ die Anzahl arithmetischer Operationen in MATMULT.
Dann ist:

$$M'(n) = \begin{cases} 2n^3 - n^2 & \text{falls } n < 16 \\ 7M'(\frac{n}{2}) + \frac{18}{4}n^2 & \text{falls } n \geq 16 \text{ gerade} \\ 7M'(\frac{n-1}{2}) + \frac{42}{4}n^2 - 17n + \frac{15}{2} & \text{falls } n \geq 16 \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir definieren für $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\bar{M}(x) = \begin{cases} 2x^3 - x^2 & \text{falls } x < 32 \\ 7\bar{M}(\frac{x}{2}) + \frac{42}{4}x^2 & \text{falls } x \geq 32 \end{cases}$$

Dann gilt:

$$\bar{M}(n) \geq M'(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis (Forts.):

Es ist

$$\bar{M}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[7^i \cdot \frac{42}{4} \left(\frac{x}{2^i} \right)^2 \right] + 7^k \left(2 \cdot \left(\frac{x}{2^k} \right)^3 - \left(\frac{x}{2^k} \right)^2 \right)$$

für $x \geq 32$, wobei $k := \min \{ l \mid \frac{x}{2^l} < 32 \}$.

Mit $k = \lfloor \log_2 x \rfloor - 4 =: \log_2 x - t$ erhalten wir $t \in [4, 5[$ und

$$\bar{M}(x) \leq 7^{\log_2 x} \left(13 \left(\frac{4}{7} \right)^t + 2 \left(\frac{8}{7} \right)^t \right) \leq 4,91 \cdot 7^{\log_2 x} \text{ für } x \geq 32.$$

Für $x < 32$ direkt nachrechnen. □



Volker Strassen:

Gaussian elimination is not optimal

Numer. Math. **13**, pp. 354–356 (1969)



Victor Ya. Pan:

New fast algorithms for matrix operations

SIAM J. Comput. **9**(2), pp. 321–342 (1980)



Don Coppersmith, Shmuel Winograd:

Matrix multiplication via arithmetic progressions

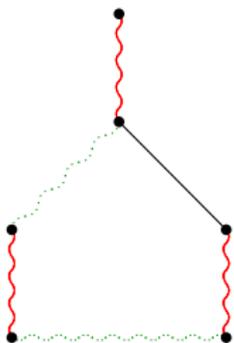
J. Symbolic Computation **9**(3), pp. 251–280 (1990)

Kapitel VI Matchings in Graphen

1. Grundlagen

Definition 127

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlichter Graph. Ein **Matching** M in G ist eine Teilmenge von E , so dass keine zwei Kanten aus M einen Endpunkt gemeinsam haben.



Matching:

— Variante 1

— Variante 2

Definition 128

- ① Ein Matching M in $G = (V, E)$ heißt **perfekt** (oder **vollkommen**), falls

$$|M| = \frac{|V|}{2}$$

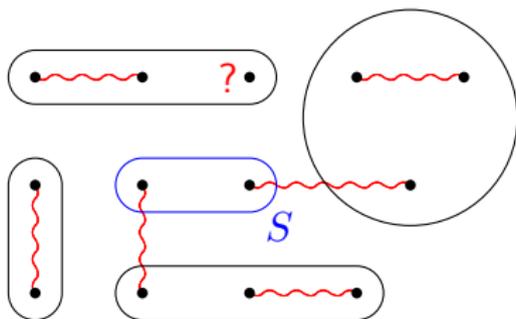
- ② Ein Matching M heißt „**Matching maximaler Kardinalität**“ (engl. **maximum matching**) in G , falls es in G kein Matching M' mit $|M'| > |M|$ gibt (durchgehend geringelt/**rot** im Beispiel)
- ③ Ein Matching M heißt **maximal** in G , falls es bezüglich „ \subseteq “ maximal ist (engl. **maximal matching**) (gepunktet geringelt/**grün** im Beispiel)

Definition 129

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Wenn V in zwei nichtleere Teilmengen V_1 und V_2 partitioniert werden kann ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), so dass $E \subseteq V_1 \times V_2$ ist, dann heißt G **bipartit** ($G = (V_1, V_2, E)$).

Satz 130

(ohne Beweis) Ein Graph $G = (V, E)$ hat ein perfektes Matching genau dann, wenn $|V|$ gerade ist und es kein $S \subseteq V$ gibt, so dass der durch $V \setminus S$ induzierte Teilgraph mehr als $|S|$ Zusammenhangskomponenten ungerader Größe enthält.



Bemerkung: Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar, da in einem perfekten Matching in jeder „ungeraden“ ZHK mindestens ein Knoten mit einem Knoten in S gematcht sein muss.

Definition 131

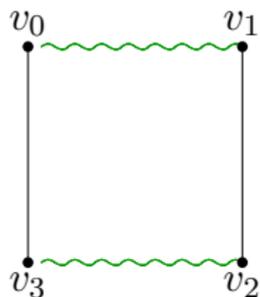
- ① Ein einfacher Pfad (Kreis) v_0, v_1, \dots, v_r heißt **alternierend** bzgl. eines Matchings M , falls die Kanten $\{v_i, v_{i+1}\}$, $0 \leq i < r$, abwechselnd in M und nicht in M liegen.



gerade Länge

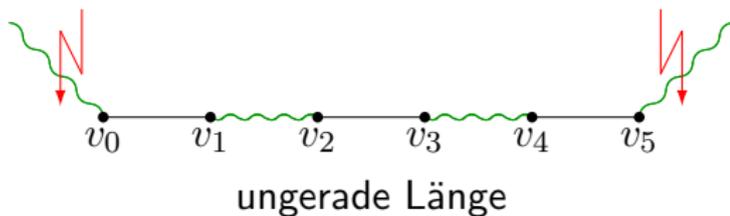


ungerade Länge



Definition 131

- ② Ein alternierender Pfad bzgl. eines Matchings M heißt **augmentierend**, falls er bzgl. „ \subseteq “ maximal ist und an beiden Enden ungematchte Knoten hat.



Bemerkung: Es kann keine **augmentierenden Kreise** geben.

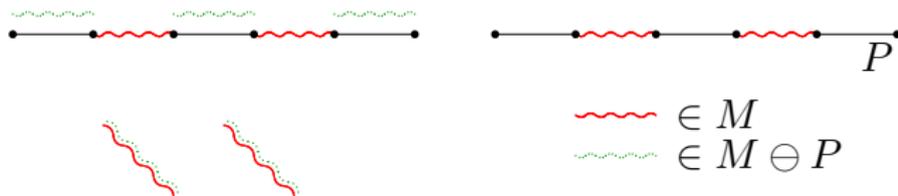
Definition 132

Seien S, T zwei Mengen, dann bezeichne $S \ominus T$ die **symmetrische** Differenz von S und T , d.h. $S \ominus T = (S - T) \cup (T - S)$.

Lemma 133 (Augmentierung eines Matchings)

Sei M ein Matching, P ein augmentierender Pfad bzgl. M . Dann ist auch $M \ominus P$ ein Matching, und es gilt $|M \ominus P| = |M| + 1$.

Beweis:



□

Satz 134 (Heiratsatz [Frobenius, Hall, Rado, König])

Sei $G = (U, V, E)$ ein bipartiter Graph. G enthält ein Matching der Kardinalität $|U|$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall A \subseteq U : |N(A)| \geq |A|,$$

wobei $N(A)$ die Nachbarschaft von A (in V) bezeichnet.

