

Lemma 211 (Partielle Summation)

Es gilt:

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f) .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g)(x) &= (f \cdot g)(x+1) - (f \cdot g)(x) \\ &= f(x+1) \cdot g(x+1) - f(x) \cdot g(x) \\ &= f(x+1) \cdot g(x+1) \\ &\quad \underbrace{-f(x) \cdot g(x+1) + f(x) \cdot g(x+1)}_{=0} - f(x) \cdot g(x) \\ &= g(x+1) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) \\ &= (Eg)(x) \cdot (\Delta f)(x) + f(x) \cdot (\Delta g)(x) . \end{aligned}$$

□

Bemerkung zur Notation:

Bei der Darstellung

$$\sum (f \cdot \Delta g) = f \cdot g - \sum ((Eg) \cdot \Delta f)$$

ist zu beachten, dass die diskrete Stammfunktion nur bis auf additive Konstanten bestimmt ist, links und rechts also eigentlich Klassen von Funktionen stehen (wie bei den Landau-Symbolen).

Beispiel 212

Berechne

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k$$

für $m \geq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta \binom{x}{m+1} &= \binom{x+1}{m+1} - \binom{x}{m+1} \\ &= \binom{x}{m+1} + \binom{x}{m} - \binom{x}{m+1} = \binom{x}{m}. \end{aligned}$$

Partielle Summation mit $f(x) = H_x$, $\Delta g = \binom{x}{m}$ ergibt:

Beispiel (Forts.)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} \cdot H_k &= \left(\sum \binom{x}{m} \cdot H_x \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\sum \binom{x+1}{m+1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \left(\frac{1}{m+1} \cdot \sum \binom{x}{m} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \left(H_x \cdot \binom{x}{m+1} \right) \Big|_{x=1}^{n+1} - \frac{1}{m+1} \cdot \binom{x}{m+1} \Big|_{x=1}^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{m+1} \cdot H_{n+1} - \binom{1}{m+1} \cdot H_1 \\ &\quad - \left(\frac{1}{m+1} \binom{n+1}{m+1} - \frac{1}{m+1} \binom{1}{m+1} \right) \\ &= \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) + 0.\end{aligned}$$

Lemma 213 (Newton-Darstellung von Polynomen)

Sei $f(x)$ ein Polynom vom Grad n . Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{k!} \cdot x^k = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \binom{x}{k}.$$

Bemerkung: Die Newton-Darstellung entspricht offensichtlich der Taylorreihenentwicklung im differenzierbaren Fall.

Beweis:

$f(x)$ kann als Polynom vom Grad n eindeutig in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k$$

geschrieben werden (x^k ist Basis!). Damit ist nach Lemma 203 (1)

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot k^i \cdot x^{k-i}.$$

Also gilt, dass

$$\Delta^i f(0) = b_i \cdot i! \quad \text{bzw.} \quad b_k = \frac{\Delta^k f(0)}{k!}.$$



Beispiel 214

Wir haben in Beispiel 210 gesehen, dass

$$x^n = \sum_{i=0}^n S_{n,i} \cdot x^i .$$

Also gilt auch

$$\begin{aligned} k! \cdot S_{n,k} &= \Delta^k x^n \Big|_{x=0} = (E - I)^k x^n \Big|_{x=0} \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} E^i \right) x^n \Big|_{x=0} = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n , \end{aligned}$$

und damit auch

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \cdot \binom{k}{i} \cdot i^n .$$

4.9 Inversion

4.9.1 Basisfolgen

Definition 215

Eine Folge $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ von Polynomen $p_i(x)$ heißt **Basisfolge**, falls

$$\deg(p_i) = i \quad \text{für alle } i.$$

Bemerkung: $p_0 \neq 0$, da wir für $p(x) \equiv 0$ festlegen: $\deg(p) = -1$.

Beobachtung: $(p_i(x))_{i \geq 0}$ sei eine Basisfolge. Dann kann jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad n eindeutig dargestellt werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^n f_i \cdot p_i(x)$$

mit $f_i \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Mit Koeffizientenvergleich und vollständiger Induktion. □

4.9.2 Zusammenhangskoeffizienten

Seien $(p_i(x))_{i \geq 0}$ und $(q_i(x))_{i \geq 0}$ Basisfolgen. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $a_{n,k}$ und $b_{n,k} \in \mathbb{R}$ (die sogenannten **Zusammenhangskoeffizienten**), so dass für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

1

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot p_k(x)$$

2

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

Lemma 216

Seien die $a_{n,k}$, $b_{n,k}$ wie oben, $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ und $B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$, dann ist

$$AB = I$$

(I ist die $n + 1$ -dimensionale Einheitsmatrix.)

Beweis:

Klar. □

Satz 217

Seien $a_{n,k}$ und $b_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, die zu zwei Basisfolgen gehörenden Zusammenhangskoeffizienten. Dann gilt:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \cdot u_k \right] \iff (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \cdot v_k \right]$$

Beweis:

In Matrixschreibweise gilt:

$$v = (v_0, \dots, v_n)^T = A \cdot u \iff u = B \cdot v$$

Klar, da $A = B^{-1}$.



4.9.3 Die Binomialinversion

Der Binomialsatz ergibt:

$$x^n = ((x - 1) + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (x - 1)^k$$
$$(x - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

Betrachte die beiden Basisfolgen

$$(v_k)_{k \geq 0} := (x^k)_{k \geq 0} \quad \text{und} \quad (u_k)_{k \geq 0} := ((x-1)^k)_{k \geq 0}.$$

Satz 217 liefert:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \cdot v_k \right]$$

Für „Puristen“: Ersetze u_n durch $(-1)^n \cdot u_n$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot u_k \right] &\iff \\ (\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot v_k \right] \end{aligned}$$

Beispiel 218

Sei $d(n, k)$ die Anzahl der Permutationen $\in S_n$ mit genau k Fixpunkten.

$$D_n := d(n, 0) .$$

(Die Anzahl der sog. **derangements**).

$$n! = \sum_{k=0}^n d(n, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} \stackrel{k \mapsto n-k}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$

Beispiel (Forts.)

Mit der Binomialinversion gilt:

$$\begin{aligned}D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \\&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \frac{n^k}{n!} \right) \\&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \left((-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)!} \right) \\&= n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} .\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{|S_n|} = \frac{1}{e} .$$

4.9.4 Stirling-Inversion

Betrachte die Basisfolgen $(x^n)_{n \geq 0}$ und $(x^n)_{n \geq 0}$. Wie wir bereits gesehen haben, gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot x^k$$

$$x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

Daraus lässt sich die **Stirling-Inversion** ableiten:

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \left[v_n = \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s_{n,k} \cdot v_k \right]$$

4.10 Erzeugende Funktionen

Definition 219

Zu einer Folge $(a_i)_{i \geq 0}$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ist die zugehörige (gewöhnliche) erzeugende Funktion die formale Potenzreihe

$$A(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot z^i .$$