

2. Zahlpartitionen

Eine geordnete Zahlpartition ist gegeben durch

$$\mathbb{N} \ni n = n_1 + n_2 + \dots + n_k; \quad n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$$

Betrachte folgende graphische Darstellung:



Wähle aus den $n - 1$ Trennstellen $k - 1$ aus. Jede der $\binom{n-1}{k-1}$ Wahlmöglichkeiten ergibt eine eindeutig bestimmte geordnete k -Zahlpartition und umgekehrt.

Ihre Anzahl ist also

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

4.3 Multimengen

Beispiel 169

$$M := \{1, 2, 2, 3, 5, 5, 5\} \quad |M| = 7$$

Satz 170

Die Anzahl der k -Multimengen (also Multimengen der Kardinalität k) aus N ($|N| = n$) ist

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!}.$$

Beweis:

Sei o.B.d.A. $N = \{1, \dots, n\}$. Betrachte eine Multimenge $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ der Kardinalität k . Sei o.B.d.A. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Definiere die Ersetzung f :

$$f : \begin{array}{ccc} a_1 & a_1 & \geq 1 \\ a_2 & a_2 + 1 & \\ a_3 & a_3 + 2 & \\ \vdots & \vdots & \\ a_k & a_k + k - 1 & \leq n + k - 1 \end{array}$$

Das Ergebnis unter f ist eine Menge $\subseteq [n + k - 1]$. Die Anzahl der Möglichkeiten auf der rechten Seite beträgt $\binom{n+k-1}{k}$, und die durch f gegebene Zuordnung ist offensichtlich bijektiv. \square

Andere Beweisvariante:

Beweis:

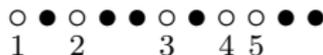
$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & & 0 & 2 & & & & & 1 & & 0 \\ \circ & \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet & \bullet & \circ & \dots & \circ & \bullet & \circ \\ 1 & 2 & & 3 & 4 & & & & & n-1 & & n \end{array}$$

Von $n + k$ Kugeln werden k schwarz gefärbt; die erste darf nicht schwarz gefärbt werden. Also bleiben n weiße Kugeln übrig, darunter die erste.

Jede dieser weißen Kugeln zählt nun als sooft ausgewählt, wie unmittelbar rechts davon schwarze Kugeln stehen. Es werden also aus n weißen Kugeln k ausgewählt (mit Wiederholung). \square

Beispiel 171

Darstellung zu obigem Beispiel:



Zugehörige Multimenge:

$$\{1, 2, 2, 3, 5, 5\}$$

4.4 Anzahl von Abbildungen

Betrachte Funktionen von N (Urbildraum) nach R (Bildraum),
 $|N| = n, |R| = r$ mit $n, r \in \mathbb{N}_0$.

Die Anzahl beliebiger Abbildungen $N \rightarrow R$ ist

$$r^n .$$

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $N \rightarrow R$ ist

$$r^{\underline{n}} .$$

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $N \rightarrow R$ („geordnete
 r -Mengenpartitionen von N “) ist

$$r! \cdot S_{n,r} .$$

Die Gesamtzahl der Abbildungen $N \rightarrow R$ ist

$$\begin{aligned} &= r^n = \sum_{A \subseteq R} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \rightarrow A \\ &= \sum_{k=0}^r \sum_{\substack{A \subseteq R \\ |A|=k}} \# \text{ der surjektiven Abbildungen } N \rightarrow A \\ &= \sum_{k=0}^r \left(\binom{r}{k} \cdot k! \cdot S_{n,k} \right) = \sum_{k=0}^r S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot r^{\underline{k}}, \quad \text{da } r^{\underline{k}} = 0 \text{ f\"ur } k > r . \end{aligned}$$

4.5 Zusammenfassende Darstellung

N seien n Tennisbälle, R seien r Schachteln: „balls into bins“

	beliebig	injektiv	surjektiv	bijektiv ($n = r$)
N unterscheidbar R unterscheidbar	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N nicht unterscheidbar R unterscheidbar	$\frac{r^{\bar{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r S_{n,k}$	1 oder 0	$S_{n,r}$	1
N nicht unterscheidbar R nicht unterscheidbar	$\sum_{k=1}^r P_{n,k}$	1 oder 0	$P_{n,r}$	1