

Beispiel 27 (Beweis durch Widerspruch)

Wir nehmen an, dass die zu zeigende Aussage falsch ist und führen diese Annahme zu einem Widerspruch.

Satz 28

$\sqrt{3}$ ist irrational, d. h. $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis:

Widerspruchsannahme: $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}, \text{ggT}(p, q) = 1 \quad (*)$$

$$\Rightarrow 3q^2 = p^2 \Rightarrow 3|p \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0) [p = 3k]$$

$$\Rightarrow 3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3|q \Rightarrow 3|\text{ggT}(p, q)$$

Das ist ein Widerspruch zu (*). □

Vollständige Induktion

Wir wollen zeigen, dass eine Aussage $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Wir zeigen zunächst den **Induktionsanfang**, also $P(0)$, und folgern dann aus der **Induktionsvoraussetzung**, also der Annahme $P(n)$ bzw. den Annahmen $P(0), P(1), \dots, P(n)$, die Behauptung $P(n + 1)$.

Beispiel 29

Satz 30

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Beweis:

Induktionsanfang: $n = 0$ trivial $0 = 0$

Induktionsannahme: $P(n)$, also Satz richtig für n

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n+1} i &= \sum_{i=0}^n i + n + 1 \stackrel{\text{(IV)}}{=} \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + n + 1 = \\ &= \frac{2 \cdot (n + 1) + n \cdot (n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}\end{aligned}$$

Dies ist $P(n + 1)$, die Behauptung für $n + 1$. □

Das Schubfachprinzip (*pigeon hole principle*)

Satz 31

Sei $f : X \rightarrow Y$, sei $\infty > |X| > |Y| \geq 1$, dann

$$(\exists y \in Y) [|f^{-1}(y)| \geq 2]$$

Beweis:

Sei $|X| = n$, $|Y| = m$, und sei $n > m$. Widerspruchsannahme: Kein $y \in Y$ hat mehr als ein Urbild in X . Die Bilder der ersten m Elemente aus X müssen dann notwendigerweise verschieden sein. Damit hat jedes $y \in Y$ ein Urbild in X . Da f total ist, muss das Bild des $(m + 1)$ -ten Elements aus X dann als Bild ein Element aus Y haben, das bereits Bild eines anderen $x \in X$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. □

Beispiele:

- Seien 13 oder mehr Personen in einem Raum. Dann haben mindestens 2 der Personen im gleichen Monat Geburtstag.

- Behauptung: In jeder Menge P von Personen ($|P| \geq 2$) gibt es immer mindestens 2 Personen, die gleich viele (andere) Personen in der Menge kennen („kennen“ symmetrische Relation).

Beweis:

- 1 Überlegung: Sei $n = |P|$. Wir betrachten die Abbildung $P \ni p \mapsto \# \text{ Personen, die } p \text{ kennt} \in \{0, \dots, n-1\}$
- 2 Weitere Überlegung:
 - 1 1. Fall: 0 kommt als Bild nicht vor (jeder kennt mindestens eine andere Person).
 $\Rightarrow |\text{Urbildmenge}| = n$ und $|\text{Bildmenge}| \leq n-1$. Das Schubfachprinzip liefert die Behauptung.
 - 2 2. Fall: 0 kommt als Bild vor.
 \Rightarrow Es gibt also (wegen der Symmetrie) mindestens eine Person, die kein anderer kennt. Also ist der Wertebereich der Funktion $\subseteq \{0, 1, \dots, n-2\}$. Das Schubfachprinzip liefert nunmehr ebenfalls den Beweis.



Das verallgemeinerte Schubfachprinzip

Satz 32

Sei $f : X \rightarrow Y$, $\infty > |X| \geq |Y| \geq 1$. Dann existiert ein $y \in Y$, so dass

$$|f^{-1}(y)| \geq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil .$$

Beweis:

Es gilt $|X| = \left| \bigcup_{y \in Y} f^{-1}(y) \right| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)|$. Das zweite „=“ gilt, da die $f^{-1}(y)$ alle paarweise disjunkt sind!

Widerspruchsannahme:

$$(\forall y \in Y) \left[|f^{-1}(y)| \leq \left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \right]$$

Da

$$\left\lceil \frac{|X|}{|Y|} \right\rceil - 1 \leq \frac{|X| + |Y| - 1}{|Y|} - 1 = \frac{|X| - 1}{|Y|},$$

folgt mit der Widerspruchsannahme

$$|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)| \leq |Y| \cdot \frac{|X| - 1}{|Y|} = |X| - 1.$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. □