Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11

Zirkuläre Partitionen

Crossing Cuts in $G = (V, E)$ partitionieren V in vier Teile

Allgemeiner:

Definition

Eine zirkuläre Partition ist eine Aufteilung von V in $k \geq 3$ disjunkte Mengen $V_1, V_2, \ldots, V_k$, so dass

- $w(V_i, V_j) = \begin{cases} \lambda/2 & \text{falls } |i - j| = 1 \mod k \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$
- Falls S ein Minimum Cut ist, dann ist
  - S oder $\bar{S}$ eine echte Teilmenge einer Menge V_i oder
  - die zirkuläre Partition ist eine Verfeinerung der Partition, die durch den Minimum Cut S definiert wird.
    (S ist die Vereinigung einiger Mengen der zirkulären Partition.)

Circular Partition Cuts

- Seien $V_1, V_2, \ldots, V_k$ die disjunkten Mengen einer zirkulären Partition.

$\Rightarrow$ Für alle a, b mit $1 \leq a \leq b < k$ ist die Menge

$$S = \bigcup_{i=a}^{b} V_i$$

ein Minimum Cut (zusammen mit $\bar{S} = V \setminus S$),
genannt Circular Partition Cut.

- Insbesondere ist jedes einzelne V_i $(1 \leq i \leq k)$ ist ein Minimum Cut (erster Punkt der Definition zirkulärer Partitionen).

Zirkuläre Partitionen

- Betrachte Minimum Cut S, so dass weder S noch $\bar{S}$ in einer Menge der zirkulären Partition enthalten ist.

Aus dem zweiten Teil der Definition zirkulärer Partitionen folgt

- Da S und $\bar{S}$ zusammenhängend sein müssen, ist S oder $\bar{S}$ gleich $\bigcup_{i=a}^{b} V_i$ für ein Paar a, b mit $1 \leq a < b < k$.
- Für jedes V_i einer zirkulären Partition gilt:
  es existiert kein Minimum Cut S, so dass $\langle V_i, S \rangle$ ein Crossing Cut ist.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

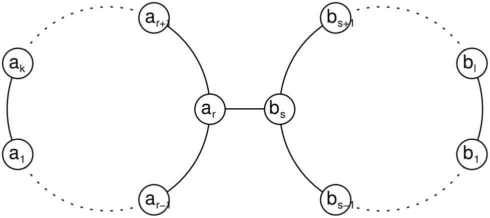
Definition

Zwei verschiedene zirkuläre Partitionen $P = \{U_1, \ldots, U_k\}$ und $Q = \{V_1, \ldots, V_l\}$ sind kompatibel, wenn es eindeutige Zahlen r und s $(1 \leq r, s \leq k)$ gibt, so dass

- $\forall i \neq r : \quad U_i \subseteq V_s$ und
- $\forall j \neq s : \quad V_j \subseteq U_r$.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beispiel:



$$P = \{\{a_1\}, \dots, \{a_{r-1}\}, \{a_r, b_1, \dots b_l\}, \{a_{r+1}\}, \dots \{a_k\}\}$$

$$Q = \{\{b_1\}, \dots, \{b_{s-1}\}, \{b_s, a_1, \dots a_k\}, \{b_{s+1}\}, \dots \{b_l\}\}$$

Lemma

Alle verschiedenen zirkulären Partitionen sind paarweise kompatibel.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Betrachte zwei zirkuläre Partitionen P und Q in $G = (V, E)$.
- Alle Mengen der Partitionen sind Minimum Cuts.
- Behauptung: Jede Menge von P oder ihr Komplement ist in einer Menge von Q enthalten.
- Annahme: eine Menge $S \in P$ ist die Vereinigung von mindestens zwei, aber nicht von allen Mengen von Q.
- Genau zwei Mengen $A, B \in Q$, die in S enthalten sind, sind durch mindestens eine Kante zu den Knoten in $V \setminus S$ verbunden.
- Außerdem müssen die Mengen aus Q, die zusammen S bilden, in Q konsekutiv sein, sonst hätte der Cut zum Rest eine Kapazität $> \lambda$.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Sei T die Menge, die man durch Ersetzen von $A \subset S$ durch das Element von Q erhält, das zu B verbunden, aber nicht in S enthalten ist.
- T ist ein Minimum Cut (die Kanten zwischen A und $S \setminus A$ haben Kapazität $\lambda/2$, gleiches gilt für die Anbindung der neuen Menge aus Q an den Rest von Q in der anderen Richtung)

$\Rightarrow$ Dann ist $\langle S, T \rangle$ ein Crossing Cut.

$\Rightarrow$ P und Q erfüllen nicht mehr die zweite Bedingung in der Definition zirkulärer Partionen.
(Widerspruch)

$\Rightarrow$ Jede Menge von P oder ihr Komplement ist in einer Menge von Q enthalten.

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Annahme: zwei Mengen von P sind in zwei verschiedenen Mengen von Q enthalten.
- Komplement jeder übrigen Menge von P enthält beide Mengen und kann deshalb nicht in einer einzelnen Menge von Q enthalten sein.

$\Rightarrow$ Jede übrige Menge von P ist Teilmenge einer Menge von Q.

- Gleiches gilt umgekehrt für die übrigen Mengen von Q.

$\Rightarrow$ $P = Q$ (Widerspruch)

$\square$

Kompatibilität zirkulärer Partitionen

Beweis.

- Annahme: alle Mengen von P sind in einer Menge Y von Q

$\Rightarrow$ $Y = V$ (Widerspruch)

$\Rightarrow$ Es gibt mindestens eine Menge X in P, deren Komplement $\bar{X}$ eine Teilmenge einer Menge Y aus Q ist.

- Da die Vereinigung von zwei Komplementen von Mengen aus P gleich V ist und Q mindestens drei Mengen enthält, kann nur genau ein Komplement einer Menge aus P in einer Menge von Q enthalten sein.
- Alle anderen Mengen aus P sind Teilmengen von $\bar{X}$ und damit auch in Menge Y aus Q enthalten.
- Y ist nicht Teilmenge einer Menge aus P.

$\Rightarrow$ $\bar{Y} \subset X$ und alle anderen Mengen aus Q sind auch Teilmengen von X.

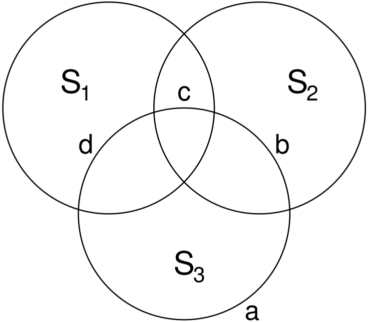
□

Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Lemma

Wenn S_1, S_2 und S_3 paarweise Crossing Cuts sind, dann gilt:

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$$



Paarweise Disjunktheit von Crossing Cuts

Beweis.

- Annahme: Lemma falsch, also Schnittmenge nicht leer
- Definiere
  - $b = w\left((S_2 \cap S_3) \setminus S_1, S_2 \setminus (S_1 \cup S_3)\right)$
  - $c = w\left(S_1 \cap S_2 \cap S_3, (S_1 \cap S_2) \setminus S_3\right)$
  - $d = w\left((S_1 \cap S_3) \setminus S_2, S_1 \setminus (S_2 \cup S_3)\right)$
- Einerseits ist $S_1 \cap S_2$ ein Minimum Cut. $\Rightarrow \quad c \geq \frac{\lambda}{2}$
- Andererseits ist $c + b = c + d = \frac{\lambda}{2}$.

$\Rightarrow$ $b = d = 0$ und $(S_1 \cap S_3) \setminus S_2 = (S_2 \cap S_3) \setminus S_1 = \emptyset$

- Da es keine diagonalen Kanten im Crossing Cut $\langle S_1, S_2 \rangle$ gibt (siehe früheres Lemma), sind $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ und $S_3 \setminus (S_1 \cup S_2)$ nicht verbunden. (Widerspruch weil aufgrund der Crossing Cuts $\langle S_1, S_3 \rangle$ und $\langle S_2, S_3 \rangle$ der Schnittwert $\lambda/2$ sein müsste)

$\square$