

# Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen  
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)  
Institut für Informatik  
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11



# Dense $\ell$ -Subgraph

- Graph mit Durchschnittsgrad  $\overline{\deg}(G)$  muss nicht unbedingt einen echten Teilgraphen mit gleichem Durchschnittsgrad enthalten.
- Maximum des Durchschnittsgrads eines Teilgraphs auf  $\ell$  Knoten:

$$\gamma^*(G, \ell) = \max \{ \overline{\deg}(G[U]) : U \subseteq V \text{ und } |U| = \ell \}$$

## Problem

*Problem:* **Dense- $\ell$ -Subgraph**

*Eingabe:* Graph  $G$ , Parameter  $\ell \in \mathbb{N}$

*Frage:* Eine Knotenmenge der Kardinalität  $\ell$  mit maximalem induzierten Durchschnittsgrad

# Dense $\ell$ -Subgraph

- Optimierungsproblem **Dense  $\ell$ -Subgraph** ist  $\mathcal{NP}$ -hart, denn Instanz  $(G, \ell, \ell - 1)$  des zugehörigen Entscheidungsproblems entspricht der Suche nach einer Clique der Größe  $\ell$  in  $G$ .

⇒ Wie sieht es mit Approximation aus?

# Greedy-Approximation für Dense $\ell$ -Subgraph

---

**Algorithmus 10** : Approximation eines  $\ell$ -Subgraph mit hohem  $\overline{\text{deg}}$

---

**Input** : Graph  $G = (V, E)$  und  
gerader Parameter  $\ell \in \mathbb{N}$  (mit  $|V| \geq \ell$ )

**Output** : Menge von  $\ell$  Knoten von  $G$

Sortiere die Knoten in absteigender Reihenfolge ihrer Grade;

Sei  $H$  die Menge von  $\frac{\ell}{2}$  Knoten von höchstem Grad;

Berechne  $N_H(v) = |N(v) \cap H|$  für alle Knoten  $v \in V \setminus H$ ;

Sortiere die Knoten in  $V \setminus H$  in absteigender Reihenfolge der  $N_H$ -Werte;

Sei  $R$  die Menge von  $\frac{\ell}{2}$  Knoten von  $V \setminus H$  mit den höchsten  $N_H$ -Werten;

**return**  $H \cup R$

---

# Greedy-Approximation für **Dense** $\ell$ -Subgraph

## Satz

Sei  $G$  ein Graph auf  $n$  Knoten und sei  $\ell \in \mathbb{N}$  eine gerade natürliche Zahl mit  $\ell \leq n$ .

Sei  $A(G, \ell)$  der Durchschnittsgrad des induzierten Teilgraphen, der vom vorstehenden Algorithmus ausgegeben wird.

Dann gilt:

$$\gamma^*(G, \ell) \leq \frac{2n}{\ell} \cdot A(G, \ell)$$

bzw.

$$A(G, \ell) \geq \frac{\ell}{2n} \cdot \gamma^*(G, \ell)$$

# Greedy-Approximation für **Dense $\ell$ -Subgraph**

## Beweis.

- Für Knotenteilmengen  $U, U' \subseteq V$  sei  $E(U, U')$  die Menge der Kanten mit einem Endpunkt in  $U$  und einem Endpunkt in  $U'$ .
- Sei  $m_U = |E(G[U])|$
- Sei  $\deg_H$  der Durchschnittsgrad der  $\frac{\ell}{2}$  Knoten von  $G$  mit höchstem Grad bezüglich  $G$ . Es gilt:  $\deg_H \geq \gamma^*(G, \ell)$ .
- Man erhält für die Anzahl der Kanten zwischen  $H$  und dem Rest  $V \setminus H$ :

$$|E(H, V \setminus H)| = \deg_H \cdot |H| - 2m_H = \frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H \geq 0$$

# Greedy-Approximation für **Dense $\ell$ -Subgraph**

## Beweis.

- Weil der Algorithmus greedy (gierig) arbeitet, muss der Anteil der Kanten nach  $R$  (i.Vgl. zu  $V \setminus H$ ) mindestens so groß sein, wie der Anteil der Knoten:

$$\frac{|E(H, R)|}{|E(H, V \setminus H)|} \geq \frac{|R|}{|V \setminus H|} = \frac{\ell/2}{n - \ell/2} = \frac{\ell}{2n - \ell} > \frac{\ell}{2n}$$

- Also ist die Gesamtzahl der Kanten in  $G[H \cup R]$  mindestens

$$\left( \frac{\deg_H \cdot \ell}{2} - 2m_H \right) \cdot \frac{\ell}{2n} + m_H \geq \frac{\deg_H \cdot \ell^2}{4n}$$



# Approximation von **Dense** $\ell$ -Subgraph

- Die Approximationsgüte wird umso besser, je größer  $\ell$  im Vergleich zu  $n$  ist.
- Es gibt andere Approximationsverfahren mit Güte  $\mathcal{O}(\frac{n}{\ell})$ , z.B. durch rekursives Löschen von Knoten mit kleinstem Grad.

# Parametrisierte Dichte

- Schwelle für Dichte (density threshold)  $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_+$ 
  - ▶  $\gamma$  soll in Polynomialzeit berechenbar sein und
  - ▶  $\forall \ell \in \mathbb{N}: \gamma(\ell) \leq \ell - 1$  soll gelten
- Knotenteilmenge  $U$  heißt genau dann  $\gamma$ -**dicht**, wenn

$$\overline{\text{deg}}(G[U]) \geq \gamma(|U|)$$

## Problem

*Problem:*  $\gamma$ -dense **Subgraph**

*Eingabe:* Graph  $G$ , Parameter  $\ell \in \mathbb{N}$

*Frage:* Existiert eine  $\gamma$ -dichte Knotenmenge der Kardinalität  $\ell$  in  $G$ ?

# Parametrisierte Dichte

- $\gamma(\ell) = \ell - 1$  entspricht **Clique**-Problem und ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig
- $\gamma(\ell) = 0$  ist trivial, denn jede Menge  $U$  bestehend aus  $\ell$  Knoten ist eine Lösung, die Antwort ist also immer "ja", wenn  $\ell \leq |V|$
- Welche Funktionen  $\gamma(\ell)$  erlauben noch Lösbarkeit in Polynomialzeit?

## Satz

Sei  $\gamma$  eine Schwellwertfunktion für die Dichte.

- 1 Falls  $\gamma = 2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ell}\right)$ , dann ist  $\gamma$ -dense **Subgraph** in Polynomialzeit lösbar.
- 2 Falls  $\gamma = 2 + \Omega\left(\frac{1}{\ell^{1-\varepsilon}}\right)$  für ein  $\varepsilon > 0$ , dann ist  $\gamma$ -dense **Subgraph**  $\mathcal{NP}$ -vollständig.

# Parametrisierte Dichte

- Einen Teilgraph mit  $\ell$ -Knoten und Durchschnittsgrad  $\overline{\deg} \geq 2$  zu finden, geht also in Polynomialzeit.
  - Aber einen Teilgraph mit  $\ell$ -Knoten und Durchschnittsgrad  $\overline{\deg} \geq 2 + \varepsilon$  (für  $\varepsilon > 0$ ) zu finden, geht nicht in Polynomialzeit falls  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ .
  - $k$ -Cores ließen sich in Linearzeit berechnen (sogar für alle  $k$  gleichzeitig)
- ⇒ riesiger **Komplexitätsunterschied** zwischen statistischer und struktureller Dichte!

# Übersicht

- 1 Zusammenhang
  - Definitionen
  - Fundamentale Sätze

# Zusammenhang in Graphen / Netzwerken

- beschäftigt sich mit der Stärke der Verbindung zwischen zwei Knoten in Bezug auf die Anzahl knoten- bzw. kantendisjunkter Wege
  - “Eine Kette ist nur so stark wie ihr schwächstes Glied.”
- ⇒ Wir suchen nach den schwächsten Elementen, die beim Entfernen die Verbindung zerstören.

## Definition

Ein ungerichteter Graph heißt **zusammenhängend**, wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als **Zusammenhangskomponente** bezeichnet.

# Knoten-Zusammenhang

## Definition

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt  **$k$ -knotenzusammenhängend**, falls  $|V| > k$  und für jede echte Knotenteilmenge  $X \subset V$  mit  $|X| < k$  der Graph  $G - X$  zusammenhängend ist.

Der **Knotenzusammenhang**  $\kappa(G)$  des Graphen  $G$  ist die größte natürliche Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -knotenzusammenhängend ist.

Bemerkungen:

- Jeder nicht-leere Graph ist 0-knotenzusammenhängend, da es keine Teilmenge  $X$  mit  $|X| < 0$  gibt.
- Obwohl es wünschenswert wäre, dass die Bezeichnung “1-knotenzusammenhängend” gleichzusetzen ist mit der Bezeichnung “zusammenhängend”, wird üblicherweise der Graph bestehend aus nur einem einzelnen Knoten zwar als zusammenhängend, aber nicht 1-zusammenhängend bezeichnet.

# Kanten-Zusammenhang und $k$ -Komponenten

## Definition

Ein ungerichteter Graph  $G = (V, E)$  heißt  **$k$ -kantenzusammenhängend**, falls  $|V| \geq 2$  und für jede Kanteilmenge  $Y \subseteq E$  mit  $|Y| < k$  der Graph  $G - Y$  zusammenhängend ist.

Der **Kantenzusammenhang**  $\lambda(G)$  des Graphen  $G$  ist die größte natürliche Zahl  $k$ , für die  $G$   $k$ -kantenzusammenhängend ist.

Der Kantenzusammenhang eines unzusammenhängenden Graphen sowie des Graphen bestehend aus einem einzelnen Knoten ist 0.

## Definition

Die maximalen  $k$ -fach knoten-/kanten-zusammenhängenden Teilgraphen werden als  **$k$ -Knoten-/Kanten-Zusammenhangskomponenten** bezeichnet.

# Zusammenhang in gerichteten Graphen

## Definition

Ein gerichteter Graph ist **stark zusammenhängend**, wenn es für jeden Knoten einen gerichteten Pfad zu jedem anderen Knoten gibt.

Ein maximaler stark zusammenhängender induzierter Teilgraph wird als **starke Zusammenhangskomponente** bezeichnet.

Knoten- und Kantenzusammenhang können auf gerichtete Graphen übertragen werden, indem man in der jeweiligen Definition fordert, dass  $G - X$  bzw.  $G - Y$  *stark zusammenhängend* ist.

# Separatoren

## Definition

Sei  $G = (V, E)$  ein ungerichteter Graph.

Eine Knotenteilmenge  $C \subset V$  heißt **Knoten-Separator**, wenn die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in  $G - C$  größer als in  $G$  ist.

Falls zwei Knoten  $s$  und  $t$  zwar in  $G$  in der gleichen Zusammenhangskomponente sind, aber nicht in  $G - C$ , dann bezeichnet man  $C$  als  **$s$ - $t$ -Knoten-Separator**.

**Kanten-Separatoren** und  **$s$ - $t$ -Kanten-Separatoren** sind analog definiert.

$s$ - $t$ -Separatoren können auch auf gerichtete Graphen übertragen werden: eine Knoten- bzw. Kantenmenge ist dann ein  $s$ - $t$ -Separator, wenn es keinen gerichteten Pfad mehr von  $s$  nach  $t$  gibt, nachdem die Menge aus dem Graph entfernt wurde.

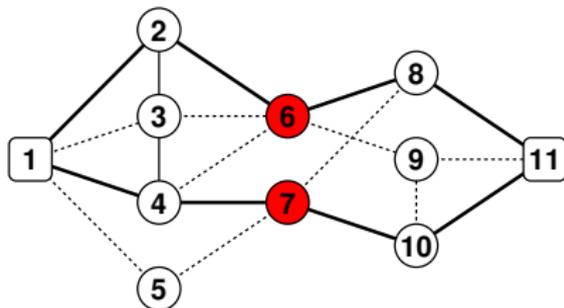
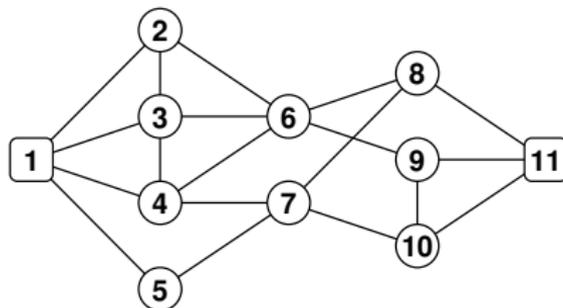
# Disjunkte Pfade

## Definition

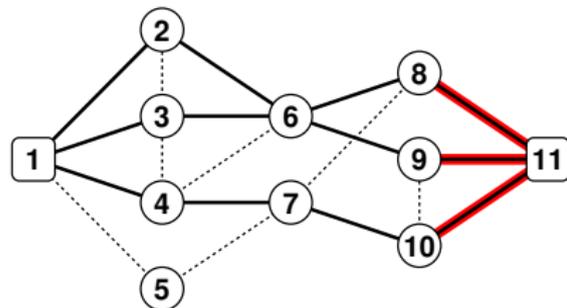
Zwei (gerichtete oder ungerichtete) Pfade von  $s$  nach  $t$  werden als **knotendisjunkte  $s$ - $t$ -Pfade** bezeichnet, wenn sie keinen Knoten außer  $s$  und  $t$  gemeinsam haben.

Zwei Pfade werden als **kantendisjunkte Pfade** bezeichnet, wenn sie keine Kante gemeinsam haben.

# Disjunkte $s$ - $t$ -Pfade



2 knotendisjunkte 1-11-Pfade



3 kantendisjunkte 1-11-Pfade

# Lokaler Zusammenhang

## Definition

Für zwei Knoten  $s$  und  $t$  eines Graphen  $G$  ist der **lokale (Knoten-)Zusammenhang**  $\kappa_G(s, t)$  definiert als die minimale Anzahl von Knoten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von  $s$  nach  $t$  gibt.

Für den Fall, dass zwischen  $s$  und  $t$  eine Kante existiert, können sie nicht durch das Löschen von Knoten separiert werden. Deshalb wird der lokale (Knoten-)Zusammenhang in diesem Fall  $\kappa_G(s, t) = n - 1$  definiert. (Anderenfalls wäre höchstens  $\kappa_G(s, t) = n - 2$  möglich.)

Der **lokale Kanten-Zusammenhang** zweier Knoten  $s$  und  $t$  ist entsprechend definiert als die minimale Anzahl von Kanten, die entfernt werden müssen, damit es keinen Weg mehr von  $s$  nach  $t$  gibt.

# Lokaler Zusammenhang

Hinweis:

Für ungerichtete Graphen gilt  $\kappa_G(s, t) = \kappa_G(t, s)$  und  $\lambda_G(s, t) = \lambda_G(t, s)$ , was für gerichtete Graphen im Allgemeinen nicht gilt.

# Zweifachzusammenhang

## Definition

Ein **Artikulationsknoten** ist ein Knoten, der beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.

Eine **Brücke** ist eine Kante, die beim Entfernen aus dem Graphen die Anzahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.

Eine **Zweifachzusammenhangskomponente** ist ein maximaler 2-fach (knoten-)zusammenhängender Teilgraph.

Ein **Block** ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph, der keinen Artikulationsknoten enthält, d.h. die Menge aller Blocks eines Graphen besteht aus den isolierten Knoten, den Brücken, sowie den Zweifachzusammenhangskomponenten.

# Block-Graph und CutPoint-Graph

## Definition

Der **Block-Graph**  $B(G)$  eines Graphen  $G$  hat jeweils einen Knoten für jeden Block von  $G$  (außer für isolierte Knoten), wobei zwei Knoten des Block-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Blöcke in  $G$  einen (Artikulations-)Knoten gemeinsam haben.

Der **CutPoint-Graph**  $C(G)$  eines Graphen  $G$  hat jeweils einen Knoten für jeden Artikulationsknoten von  $G$ , wobei zwei Knoten des CutPoint-Graphen adjazent sind, wenn die entsprechenden Artikulationsknoten in  $G$  zum gleichen Block gehören.

## Satz (Harary)

*Für jeden Graphen gilt:*

$$B(B(G)) = C(G) \quad \text{und} \quad B(C(G)) = C(B(G))$$

# Block-CutPoint-Graph

## Definition

Der **Block-CutPoint-Graph** eines Graphen  $G$  ist der bipartite Graph, dessen Knotenmenge aus je einem Knoten für jeden Artikulationsknoten von  $G$  und je einem Knoten für jeden Block von  $G$  besteht, wobei ein CutVertex-Knoten mit einem Block-Knoten genau dann durch eine Kante verbunden ist, wenn der Artikulationsknoten zu dem entsprechenden Block gehört.

## Satz (Harary & Prins)

*Der Block-CutPoint-Graph eines zusammenhängenden Graphen ist ein **Baum**.*