

Fortgeschrittene Netzwerk- und Graph-Algorithmen

Prof. Dr. Hanjo Täubig

Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
(Prof. Dr. Ernst W. Mayr)
Institut für Informatik
Technische Universität München

Wintersemester 2010/11



k -Plex-Durchmesser

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph auf n Knoten und sei V ein k -Plex mit $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Dann gilt:

- 1 Wenn $k < \frac{n+2}{2}$ ist, dann gilt $\text{diam}(G) \leq 2$.

Falls zusätzlich $n \geq 4$, dann ist G zweifach kantenzusammenhängend.

- 2 Wenn $k \geq \frac{n+2}{2}$ und G zusammenhängend ist, dann gilt $\text{diam}(G) \leq 2k - n + 2$.

k -Plex-Durchmesser

Beweis.

Fall $k < \frac{n+2}{2}$:

- für adjazente Knoten u und v gilt $d(u, v) = 1$
- Seien $u, v \in V$ also nicht adjazente Knoten ($u \neq v$)
- Annahme: $d(u, v) \geq 3 \Rightarrow N(u) \cap N(v) = \emptyset$, d.h.

$$n - 2 \geq |N(u) \cup N(v)| \geq 2\delta(G) \geq 2(n - k) > \dots$$

$$\dots > 2 \left(n - \frac{n+2}{2} \right) = n - 2$$

(Widerspruch)

$$\Rightarrow d(u, v) \leq 2 \Rightarrow \text{diam}(G) \leq 2$$

k -Plex-Durchmesser

Beweis.

Fall $k < \frac{n+2}{2}$, $n \geq 4$:

- Annahme: \exists Brücke e , d.h. $G - \{e\}$ enthält zwei Zusammenhangskomponenten V_1 und V_2
 - Jeder kürzeste Pfad von einem Knoten in V_1 zu einem Knoten in V_2 muss diese Brücke benutzen.
- \Rightarrow Da $\text{diam}(G) \leq 2$, muss eine Komponente ein einzelner Knoten sein. Dieser Knoten v hat Grad $\text{deg}(v) = 1$.
- Da V ein k -Plex mit $n \geq 4$ Knoten ist, gilt für den Grad dieses Knotens v aber auch: $\text{deg}(v) \geq n - k > n - \frac{n+2}{2} = \frac{n-2}{2} \geq 1$ (Widerspruch)
- \Rightarrow Es existiert keine Brücke in G bzw. G ist **2-fach kantenzusammenhängend**.

k -Plex-Durchmesser

Beweis.

Fall $k \geq \frac{n+2}{2}$:

- Sei $\{v_0, v_1, \dots, v_r\}$ ein längster kürzester Pfad, also ein Pfad mit $d(v_0, v_r) = r = \text{diam}(G)$.
- Annahme: $r \geq 4$ (sonst ist $r < 4 = 2 \frac{n+2}{2} - n + 2 \leq 2k - n + 2$)
- Da es keinen kürzeren Pfad zwischen v_0 und v_r gibt, ist v_i zu keinem der Knoten $v_0, \dots, v_{i-2}, v_{i+2}, \dots, v_r$ auf dem Pfad adjazent, außer zu seinen Pfad-Nachbarknoten v_{i-1} und v_{i+1}
- Außerdem kann kein Knoten existieren, der gleichzeitig zu v_0 und zu v_3 adjazent ist.

$$\Rightarrow \{v_0\} \uplus \{v_2, v_3, \dots, v_r\} \uplus (N(v_3) \setminus \{v_2, v_4\}) \subseteq \overline{N}(v_0)$$

$$\Rightarrow 1 + (r - 1) + d_G(v_3) - 2 \leq k \quad \Rightarrow \quad r + (n - k) - 2 \leq k$$

$$\Rightarrow \text{diam}(G) = r \leq 2k - n + 2$$



k -Plex Problem

- (variables) Entscheidungsproblem **Plex** mit Eingabe
 - ▶ Graph G ,
 - ▶ Größenparameter ℓ und
 - ▶ Plex-Parameter k

ist \mathcal{NP} -vollständig, da das **Clique**-Problem sich darauf reduzieren lässt (mit $k = 1$)

⇒ Betrachte das Problem für feste Plex-Parameter c

Problem

Problem: c -**Plex**

Eingabe: Graph G , Parameter $\ell \in \mathbb{N}$

Frage: Existiert ein c -Plex der Kardinalität $\geq \ell$ in G ?

c -Plex

Genau wie 1-**Plex**=**Clique** sind auch alle anderen Probleme für einen festen Plex-Parameter c \mathcal{NP} -vollständig:

Satz

c -**Plex** ist \mathcal{NP} -vollständig für alle $c \in \mathbb{N}$.

Beweis: durch Reduktion von **Clique**, siehe z.B. Brandes/Erlebach (Eds.): Network Analysis (S. 128).

Cores

Relaxiere Cliquesbegriff, so dass konstant viele Verbindungen zu Gruppenmitgliedern bei jedem Knoten mindestens vorhanden sein müssen.

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und sei $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ eine natürliche Zahl.

Dann wird ein Subset $U \subseteq V$ als **k -Core** (k -Kern) bezeichnet, falls $\delta(G[U]) \geq k$.

Ein *maximaler k -Core* ist in keinem größeren k -Core echt enthalten.

Ein *Maximum k -Core* hat maximale Kardinalität unter allen k -Cores in G .

k -Core-Eigenschaften

- Jeder Graph G ist ein $\delta(G)$ -Core, jede Clique ist ein $(n - 1)$ -Core.
- Jeder $(k + 1)$ -Core ist auch ein k -Core.
- Jeder k -Core ist ein $(n - k)$ -Plex.
- Wenn U und U' k -Cores sind, dann ist auch $(U \cup U')$ ein k -Core.

⇒ Maximale k -Cores sind einzigartig.

- Nicht jeder induzierte Teilgraph eines k -Cores ist auch wieder ein k -Core, d.h. die k -Core-Eigenschaft ist *nicht* abgeschlossen unter Exklusion.

Bsp.: Jeder Kreis ist ein 2-Core, aber jeder echte Teilgraph enthält mindestens einen Knoten vom Grad < 2 .

- k -Cores sind auch nicht geschachtelt. (Nicht jeder k -Core der Größe n enthält einen k -Core der Größe $n - 1$.)
- k -Cores müssen nicht unbedingt zusammenhängend sein.

Maximale zusammenhängende k -Cores

Fakt

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $k > 0$ eine natürliche Zahl. Wenn U und U' zwei maximale zusammenhängende k -Cores in G mit $U \neq U'$ sind, dann gibt es keine Kante zwischen U und U' .

Folgerung

- Der einzige Maximum k -Core eines Graphen ist die Vereinigung seiner maximalen zusammenhängenden k -Cores.
- Der Maximum 2-Core eines zusammenhängenden Graphen ist zusammenhängend.
(Wenn er es nicht wäre, könnte man die Teile verbinden und alle neuen Knoten hätten mindestens Grad 2.)
- Ein Graph ist genau dann ein Wald, wenn er keine 2-Cores enthält.

Der Maximum k -Core

Satz

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $k > 0$ eine natürliche Zahl. Wenn man wiederholt alle Knoten mit Grad $< k$ (und alle inzidenten Kanten) entfernt, dann entspricht die verbleibende Knotenmenge U genau dem Maximum k -Core.

Beweis.

- U ist ein k -Core, d.h. wir müssen nur noch Maximum zeigen.
 - Annahme: U ist nicht Maximum k -Core.
- ⇒ ∃ nichtleere Menge $T \subseteq V$, so dass $U \cup T$ Maximum k -Core
- Als der erste Knoten von T aus G entfernt wurde, muss er Grad $< k$ gehabt haben. Das kann aber nicht sein, da er mindestens k Nachbarn in $U \cup T$ hat und alle anderen Knoten noch im Graph enthalten waren. (Widerspruch)



Core-Zerlegung

Definition

Die Core-Zahl $\xi_G(v)$ eines Knotens $v \in V$ ist die höchste Zahl k , so dass v Teil eines k -Cores im Graphen G ist, d.h.

$$\xi_G(v) = \max\{k : \exists k\text{-Core } U \text{ in } G \text{ mit } v \in U\}$$

Algorithmus zur Berechnung arbeitet nach folgendem Prinzip:

- Jeder Graph G ist ein $\delta(G)$ -Core.
- Jeder Nachbarknoten mit geringerem Grad verringert die potentielle Core-Zahl eines Knotens.

Berechnung der Core-Zahlen

Algorithmus 8 : Berechnung der Core-Zahlen

Input : Graph $G = (V, E)$

Output : Array ξ_G mit den Core-Zahlen aller Knoten in G

Berechne die Grade aller Knoten und speichere sie in D ;

Sortiere V in aufsteigender Grad-Folge D ;

foreach $v \in V$ in sortierter Reihenfolge **do**

$\xi_G(v) := D[v]$;

foreach *Knoten* u *adjacent zu* v **do**

if $D[u] > D[v]$ **then**

$D[u] := D[u] - 1$;

Sortiere V in aufsteigender Grad-Reihenfolge nach D

Berechnung der Core-Zahlen

Komplexität:

- naiv: $\mathcal{O}(mn \log n)$
(teuerste Operationen: Sortieren der Knoten nach dem Grad)
- besser: $\mathcal{O}(m + n)$
 - ▶ Knotengrade haben Werte aus dem Intervall $[0, n - 1]$
⇒ Sortieren mit n Buckets in $\mathcal{O}(n)$
 - ▶ Nachsortieren kann man sich sparen, indem man sich merkt, an welchen Indizes im Array die Knoten des nächsten Grads beginnen
Beim dekrementieren des Werts eines Knotens kommt der Knoten einfach an den Anfang des alten Intervalls und dann wird die Grenze um eine Stelle verschoben, so dass er nun zum Intervall des kleineren Grads gehört (das geht in $\mathcal{O}(1)$).
 - ▶ insgesamt: $\mathcal{O}(n)$ für Initialisierung / Sortieren, dann $\mathcal{O}(m)$ für die Schleifendurchläufe (jede Kante wird höchstens zweimal betrachtet), also $\mathcal{O}(m + n)$

Dichte Subgraphen

Definition

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $n > 1$ Knoten und m Kanten.
Dichte $\rho(G)$ des Graphen G :

$$\rho(G) = \frac{m}{\binom{n}{2}}$$

Ein durch eine Knotenteilmenge $U \subseteq V$ eines Graphen $G = (V, E)$ induzierter Teilgraph heißt η -dicht (für eine reelle Zahl η mit $0 \leq \eta \leq 1$), falls gilt:

$$\rho(G[U]) \geq \eta$$

Aber: selbst (Teil-)Graphen mit hoher Dichte können isolierte Knoten enthalten!

Eigenschaften

- Cliques sind 1-dichte (Teil-)Graphen.
 - Ein k -Plex hat Dichte $1 - \frac{k-1}{n-1}$
- ⇒ Für $n \rightarrow \infty$ gilt für k -Plexe $\eta \rightarrow 1$ bzw.
- $\forall k > 0, 0 \leq \eta \leq 1$: ein k -Plex der Größe mindestens $\frac{k-\eta}{1-\eta}$ ist ein η -dichter (Teil-)Graph.
- Aber: nicht jeder $1 - \frac{k-1}{n-1}$ -dichte (Teil-)Graph ist auch ein k -Plex.
 - Ein k -Core ist ein $\frac{k}{n-1}$ -dichter (Teil-)Graph.
Die Dichte von k -Cores kann sich für $n \rightarrow \infty$ beliebig nah an 0 annähern.
 - η -dichte Graphen sind nicht abgeschlossen unter Exklusion (Knotenausschluss), sie sind aber geschachtelt.

Schachtelung von η -dichten Graphen

Satz

Sei η eine reelle Zahl mit $0 \leq \eta \leq 1$, dann gilt:

Ein η -dichter Teilgraph der Größe $\ell > 2$ eines Graphen G enthält einen η -dichten Teilgraph der Größe $\ell - 1$ in G .

Schachtelung von η -dichten Graphen

Beweis.

- Sei

- ▶ U ein η -dichter Teilgraph von G mit $|U| = \ell$,
- ▶ m_U die Anzahl der Kanten in $G[U]$,
- ▶ v ein Knoten mit minimalem Grad in $G[U]$ (also $\deg_{G[U]}(v) = \delta(G[U])$)

- $\delta(G[U]) \leq \bar{d}(G[U]) = \frac{2m_U}{\ell} = \rho(G[U])(\ell - 1)$

- Betrachte Knotenteilmenge $U' = U \setminus \{v\}$ mit Kantenanzahl
 $m_U - \delta(G[U]) \geq \rho(G[U])\binom{\ell}{2} - \rho(G[U])(\ell - 1) = \rho(G[U])\binom{\ell-1}{2}$

$$\Rightarrow \rho(G[U']) \geq \rho(G[U]) \geq \eta$$

$$\Rightarrow U' \text{ ist ein } \eta\text{-dichter Teilgraph der Größe } \ell - 1.$$

