

## Definition 142

Eine Markov-Kette heißt **irreduzibel**, wenn es für alle Zustandspaare  $i, j \in S$  eine Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $p_{ij}^{(n)} > 0$ .

Die Definition besagt anschaulich, dass jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann, wenn man nur genügend viele Schritte durchführt. Dies ist bei endlichen Markov-Ketten genau dann der Fall, wenn der gerichtete Graph des Übergangsdigramms stark zusammenhängend ist.

## Lemma 143

*Für irreduzible endliche Markov-Ketten gilt:  $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$  für alle Zustände  $i, j \in S$ . Zusätzlich gilt auch, dass die Erwartungswerte  $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$  alle existieren.*

## Beweis:

Wir betrachten zunächst den Beweis für die Existenz von  $h_{ij}$ . Für jeden Zustand  $k$  gibt es nach Definition der Irreduzibilität ein  $n_k$ , so dass  $p_{kj}^{(n_k)} > 0$ . Wir halten  $n_k$  fest und setzen  $n := \max_k n_k$  und  $p := \min_k p_{kj}^{(n_k)}$ .

Von einem beliebigen Zustand aus gelangen wir nach höchstens  $n$  Schritten mit Wahrscheinlichkeit mindestens  $p$  nach  $j$ . Wir unterteilen die Zeit in Phasen zu  $n$  Schritten und nennen eine Phase erfolgreich, wenn während dieser Phase ein Besuch bei  $j$  stattgefunden hat. Die Anzahl von Phasen bis zur ersten erfolgreichen Phase können wir durch eine geometrische Verteilung mit Parameter  $p$  abschätzen. Die erwartete Anzahl von Phasen ist somit höchstens  $1/p$  und wir schließen  $h_{ij} \leq (1/p)n$ . Daraus folgt sofort, dass auch  $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$ . □

## Satz 144

Eine irreduzible endliche Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung  $\pi$  und es gilt  $\pi_j = 1/h_{jj}$  für alle  $j \in S$ .

### Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass es einen Vektor  $\pi \neq 0$  mit  $\pi = \pi P$  gibt. Sei  $e := (1, \dots, 1)^T$  der Einheitsvektor und  $I$  die Einheitsmatrix. Für jede Übergangsmatrix  $P$  gilt  $P \cdot e = e$ , da sich die Einträge der Zeilen von  $P$  zu Eins addieren. Daraus folgt  $0 = Pe - e = (P - I)e$  und die Matrix  $P - I$  ist somit singulär. Damit ist auch die transponierte Matrix  $(P - I)^T = P^T - I$  singulär. Es gibt also einen (Spalten-)Vektor  $\pi \neq 0$  mit  $(P^T - I) \cdot \pi = 0$  bzw.  $\pi^T P = \pi^T$ . Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\sum_i \pi_i \neq 0$ . Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $\pi$  normiert ist, also dass  $\sum_i \pi_i = 1$  gilt.

## Beweis (Forts.):

Wegen Lemma 143 existieren die Erwartungswerte  $h_{ij}$ . Für jeden Zustand  $j \in S$  gelten somit nach Lemma 137 die Gleichungen

$$\pi_i h_{ij} = \pi_i \left( 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \right) \quad \text{für } i \in S, i \neq j.$$

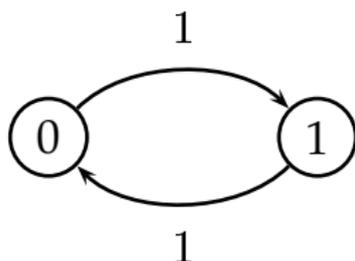
Wir addieren diese Gleichungen und erhalten wegen  $\sum_i \pi_i = 1$

$$\begin{aligned} \pi_j h_j + \sum_{i \neq j} \pi_i h_{ij} &= 1 + \sum_{i \in S} \sum_{k \neq j} \pi_i p_{ik} h_{kj} \\ &= 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} \pi_k h_{kj}. \end{aligned}$$

Wegen  $h_j > 0$  ist auch  $\pi_j = 1/h_j$  positiv und  $\pi$  stellt somit einen zulässigen Zustandsvektor dar.

Für den Fall  $\sum_i \pi_i = 0$  zeigt dieselbe Rechnung wie zuvor, dass  $\pi_j = 0$  für alle  $j \in S$  gilt. Dies steht im Widerspruch zu  $\pi \neq 0$ .  $\square$

Auch wenn eine Markov-Kette irreduzibel ist und somit eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt, so muss sie nicht zwangsläufig in diese Verteilung konvergieren.



Eine Markov-Kette mit periodischen Zuständen

Als Startverteilung nehmen wir  $q_0 = (1, 0)$  an. Es gilt:

$$q_t = \begin{cases} (1, 0) & \text{falls } t \text{ gerade,} \\ (0, 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kette pendelt also zwischen den beiden Zustandsvektoren  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  hin und her.

## Definition 145

Die **Periode** eines Zustands  $j$  ist definiert als die größte Zahl  $\xi \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode  $\xi = 1$  heißt **aperiodisch**. Wir nennen eine Markov-Kette aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

Für ein  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $p_{ii}^{(n)} > 0$  genau dann, wenn es im Übergangsdiagramm einen geschlossenen Weg von  $i$  nach  $i$  der Länge  $n$  gibt.

Damit folgt insbesondere:

Ein Zustand  $i \in S$  einer endlichen Markov-Kette ist sicherlich dann aperiodisch, wenn er im Übergangsdiagramm

- eine Schleife besitzt (also  $p_{ii} > 0$ ) oder
- auf mindestens zwei geschlossenen Wegen  $W_1$  und  $W_2$  liegt, deren Längen  $l_1$  und  $l_2$  teilerfremd sind (für die also  $\text{ggT}(l_1, l_2) = 1$  gilt).

## Lemma 146

Ein Zustand  $i \in S$  ist genau dann aperiodisch, falls gilt: Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $p_{ii}^{(n)} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ .

### Beweis:

Da je zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind, folgt aus der Existenz eines  $n_0$  mit der im Lemma angegebenen Eigenschaft sofort die Aperiodizität des Zustands. Nehmen wir daher umgekehrt an, dass der Zustand  $i$  aperiodisch ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus kann man die folgende Aussage zeigen. Für je zwei natürliche Zahlen  $a, b \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass gilt: Bezeichnet  $d := \text{ggT}(a, b)$  den größten gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$ , so gibt es für alle  $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$  nichtnegative Zahlen  $x, y \in \mathbb{N}_0$  mit  $nd = xa + yb$ .

## Beweis (Forts.):

Wegen  $p_{ii}^{(xa+yb)} \geq (p_{ii}^{(a)})^x \cdot (p_{ii}^{(b)})^y$  folgt daraus unmittelbar: Gilt für  $a, b \in \mathbb{N}$ , dass sowohl  $p_{ii}^{(a)}$  als auch  $p_{ii}^{(b)}$  positiv sind, so gilt auch  $p_{ii}^{(nd)} > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

Aus der Aperiodizität des Zustand  $i$  folgt andererseits, dass es Werte  $a_0, \dots, a_k$  geben muss mit  $p_{ii}^{(a_i)} > 0$  und der Eigenschaft, dass für  $d_1 = \text{ggT}(a_0, a_1)$  und  $d_i := \text{ggT}(d_{i-1}, a_i)$  für  $i = 2, \dots, k$  gilt  $d_1 > d_2 > \dots > d_k = 1$ .

Aus beiden Beobachtungen zusammen folgt die Behauptung.  $\square$

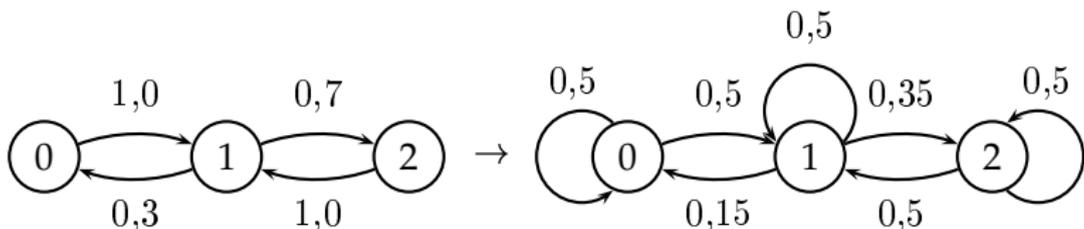
## Korollar 147

Für irreduzible, aperiodische endliche Markov-Ketten gilt: Es gibt ein  $t \in \mathbb{N}$ , so dass unabhängig vom Startzustand  $(q_t)_i > 0$  für alle  $i \in S$ .

### Beweis:

Aus der Irreduzibilität folgt, dass die Markov-Kette jeden Zustand  $i \in S$  irgendwann besuchen wird. Wegen Lemma 146 wissen wir ferner, dass die Kette hinreichend viele Schritte nach dem ersten Besuch in  $i$  in jedem folgenden Zeitschritt mit positiver Wahrscheinlichkeit zu  $i$  zurückkehren wird. Da die Kette endlich ist, gibt es daher ein  $n_0$ , so dass die Kette sich unabhängig vom Startzustand für alle  $n \geq n_0$  in jedem Zustand  $i \in S$  mit positiver Wahrscheinlichkeit aufhält. □

Die **Aperiodizität** einer irreduziblen Markov-Kette kann auf einfache Weise sichergestellt werden. Man fügt an alle Zustände so genannte **Schleifen** an. Diese versieht man mit der Übergangswahrscheinlichkeit  $p = 1/2$  und halbiert die Wahrscheinlichkeiten an allen übrigen Kanten.



Einführung von Schleifen

Bei irreduziblen Ketten genügt es, eine einzige Schleife einzuführen, um die Aperiodizität der Kette sicherzustellen.

### Definition 148

Irreduzible, aperiodische Markov-Ketten nennt man **ergodisch**.