Definition 84

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Definiere die Relation $\equiv_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ durch

$$x \equiv_L y \Leftrightarrow (\forall z \in \Sigma^*)[xz \in L \Leftrightarrow yz \in L]$$

Lemma 85

$\equiv_L$ *ist eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation.*

Dabei bedeutet rechtsinvariant:

$$x \equiv_L y \Rightarrow xu \equiv_L yu \text{ für alle } u \; .$$

Beweis:

Klar! $\square$

Satz 86 (Myhill-Nerode)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Dann sind äquivalent:

1. *L ist regulär*
2. *$\equiv_L$ hat endlichen* Index *(= Anzahl der Äquivalenzklassen)*
3. *L ist die Vereinigung einiger der endlich vielen Äquivalenzklassen von $\equiv_L$.*

Beweis:

(1)⇒(2):

Sei $L = L(A)$ für einen DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Dann gilt

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y) \quad \Rightarrow \quad x \equiv_L y \; .$$

Also gibt es höchstens so viele Äquivalenzklassen, wie der Automat A Zustände hat.

Beweis:
(2)$\Rightarrow$(3):

Sei $[x]$ die Äquivalenzklasse von x, $y \in [x]$ und $x \in L$.

Dann gilt nach der Definition von $\equiv_L$:

$$y \in L$$

Beweis:

(3)⇒(1):

Definiere $A' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit

$$\begin{array}{rcll} Q' & := & \{[x];\ x \in \Sigma^*\} & \qquad (Q' \text{ endlich!}) \\ q_0' & := & [\epsilon] & \\ \delta'([x], a) & := & [xa] \quad \forall x \in \Sigma^*, a \in \Sigma & \qquad (\text{konsistent!}) \\ F' & := & \{[x];\ x \in L\} & \end{array}$$

Dann gilt:

$$L(A') = L$$

□

5.7 Konstruktion minimaler endlicher Automaten

Satz 87

Der nach dem Satz von Myhill-Nerode konstruierte deterministische endliche Automat hat unter allen DFA's für L eine minimale Anzahl von Zuständen.

Beweis:

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$. Dann liefert

$$x \equiv_A y :\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$$

eine Äquivalenzrelation, die $\equiv_L$ verfeinert.
Also gilt: $|Q| = \text{index}(\equiv_A) \geq \text{index}(\equiv_L) =$ Anzahl der Zustände des Myhill-Nerode-Automaten. $\square$

Algorithmus zur Konstruktion eines minimalen FA

Eingabe: $A(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA $\quad (L = L(A))$

Ausgabe: Äquivalenzrelation auf Q.

0. Entferne aus Q alle überflüssigen, d.h. alle von q_0 aus nicht erreichbaren Zustände. Wir nehmen nun an, dass Q keine überflüssigen Zustände mehr enthält.
1. Markiere alle Paare $\{q_i, q_j\} \in Q^2$ mit

$$q_i \in F \text{ und } q_j \notin F \text{ bzw. } q_i \notin F \text{ und } q_j \in F\ .$$

2. **for** alle unmarkierten Paare $\{q_i, q_j\} \in Q^2$, $q_i \neq q_j$ **do**

    if $(\exists a \in \Sigma)[\{\delta(q_i, a), \delta(q_j, a)\}$ ist markiert$]$ **then**

        markiere $\{q_i, q_j\}$;

        for alle $\{q, q'\}$ in $\{q_i, q_j\}$'s Liste **do**

            markiere $\{q, q'\}$ und lösche aus Liste;

            ebenso rekursiv alle Paare in der Liste von $\{q, q'\}$ usw.

        od

    else

        for alle $a \in \Sigma$ **do**

            if $\delta(q_i, a) \neq \delta(q_j, a)$ **then**

                trage $\{q_i, q_j\}$ in die Liste von $\{\delta(q_i, a), \delta(q_j, a)\}$ ein

            fi

        od

    fi

od

3. Ausgabe: q äquivalent zu $q' \Leftrightarrow \{q, q'\}$ *nicht* markiert.

Satz 88

Obiger Algorithmus liefert einen minimalen DFA für $L(A)$.

Beweis:

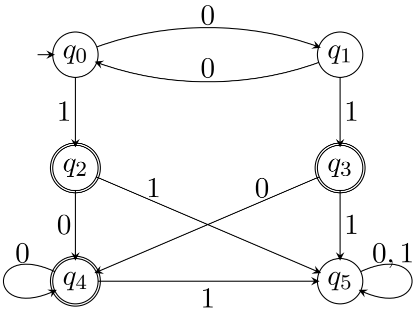
Sei $A' = (Q', \Sigma', \delta', q'_0, F')$ der konstruierte Äquivalenzklassenautomat.
Offensichtlich ist $L(A) = L(A')$.
Es gilt: $\{q, q'\}$ wird markiert gdw

$$(\exists\, w \in \Sigma^*)[\delta(q, w) \in F \wedge \delta(q', w) \notin F \text{ oder umgekehrt}],$$

wie man durch einfache Induktion über $|w|$ sieht.
Also: Die Anzahl der Zustände von A' (nämlich $|Q'|$) ist gleich dem Index von $\equiv_L$. $\square$

Beispiel 89

Automat A:



	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
q_0	/	/	/	/	/	/
q_1		/	/	/	/	/
q_2	×	×	/	/	/	/
q_3	×	×		/	/	/
q_4	×	×			/	/
q_5	×	×	×	×	×	/

Automat A':

$L(A') = 0^*10^*$