Bitserielle Addition

Ausgabefunktion des DEA:

$g:$		λ	00	01	10	11
	$\overline{\text{ü}}$	λ	0	1	1	0
	ü	1	1	0	0	1

Zustandsübergangstabelle des DEA:

$\delta:$		λ	00	01	10	11
	$\overline{\text{ü}}$	$\overline{\text{ü}}$	$\overline{\text{ü}}$	$\overline{\text{ü}}$	$\overline{\text{ü}}$	ü
	ü	$\overline{\text{ü}}$	$\overline{\text{ü}}$	ü	ü	ü

Dieser Automat stellt aus dem Eingabewort

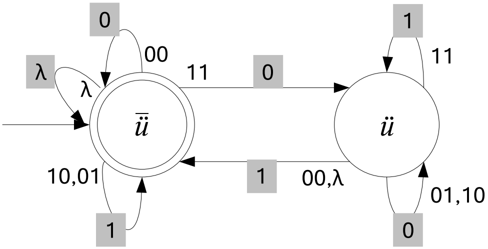
$$\begin{array}{ccccccccccc} & \cdots & \lambda & \lambda & e_6 & e_5 & e_4 & e_3 & e_2 & e_1 \\ = & \cdots & \lambda & \lambda & 01 & 10 & 10 & 11 & 00 & 00 \end{array}$$

und dem Anfangszustand $\bar{ü}$ das Ausgabewort

$$\begin{array}{cccccccccc} & \cdots & \lambda & a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \\ = & \cdots & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \text{ (Summe)} \end{array}$$

den Endzustand $\bar{ü}$ her.

Der Automat kann auch durch seinen Zustandsübergangsgraphen dargestellt werden:



Zustandsübergangsgraph des bitseriellen Addierers

4.1 Asynchroner Automat

- der zeitliche Zusammenhang zwischen Eingabe und Ausgabe ist aufgehoben
- zur mathematischen Abbildung werden das Eingabe- und das Ausgabesalphabet durch das leere Wort λ (bzw. ε) ergänzt
- der asynchrone Charakter spiegelt sich in den Funktionen g und δ wie folgt wider:

$g(\lambda, q_j) = w$	Ausgabe eines Wortes ohne Eingabe
$g(\lambda, q_j) = \varepsilon$	keine Eingabe, keine Ausgabe
$\delta(\lambda, q_j) = q_k$	spontaner Übergang ohne Eingabe

Bemerkung:

Endliche Automaten mit ε-Übergängen können in äquivalente (bzgl. der akzeptierten Sprache) deterministische endliche Automaten ohne ε-Übergänge umgewandelt werden.

5. Turing-Maschinen

- Abstraktes Modell für das prinzipielle Verhalten einer rechnenden Maschine
- Alle bisher bekannten Algorithmen können von einer Turing-Machine durchgeführt werden
- Alles, was eine Turing-Maschine tun kann, soll den Begriff Algorithmus beschreiben
- Alle Funktionen/Relationen, die sich dabei als Resultat ergeben, sollen berechenbar heissen.

Die Gleichsetzung des intuitiven Begriffs berechenbar mit dem durch Turingmaschinen gegebenen Berechenbarkeitsbegriff wird als Churchsche These bezeichnet.

5.1 Alan Turing

Geboren: 23. Juni 1912 in London, England
Gestorben: 7. Juni 1954 in Wilmslow, Cheshire, England

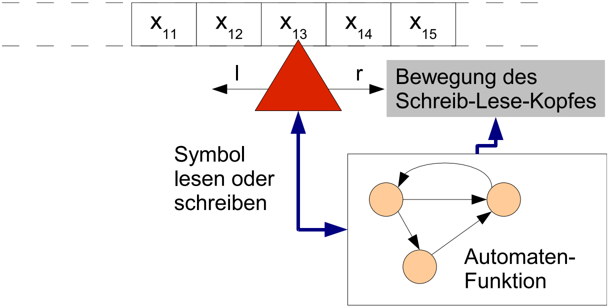
- Turing-Maschine 1936
- Government Code and Cypher School at Bletchley Park
- Entschlüsselung des Enigma Codes (2. WK)
- Hervorragender Sportler
- Turing Test 1950
- 1952 eingesperrt wegen Homosexualität
- Sicherheitsrisiko
- Tod unter teilweise ungeklärten Umständen

Und hier sind noch mehr Details zu Alan Turing.

5.2 Struktur einer Turing-Maschine

Eine Turing-Maschine besteht aus einem

- Band, auf dem Zeichen stehen
- beweglichen (um maximal eine Position) Schreib-Lese-Kopf
- Steuerautomaten



Definition 31

Eine nichtdeterministische Turingmaschine (kurz TM oder NDTM) wird durch ein 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ beschrieben, das folgende Bedingungen erfüllt:

1. Q ist eine endliche Menge von Zuständen.
2. Σ ist eine endliche Menge, das Eingabealphabet.
3. Γ ist eine endliche Menge, das Bandalphabet, mit $\Sigma \subseteq \Gamma$
4. $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, N\})$ ist die Übergangsfunktion.
5. $q_0 \in Q$ ist der Startzustand.
6. $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$ ist das Leerzeichen.
7. $F \subseteq Q$ ist die Menge der (akzeptierenden) Endzustände.

Eine Turingmaschine heißt deterministisch, falls gilt

$$|\delta(q, a)| \leq 1 \qquad \text{für alle } q \in Q, a \in \Gamma.$$

Erläuterung:

Intuitiv bedeutet $\delta(q,a) = (q', b, d)$ bzw. $\delta(q,a) \ni (q', b, d)$:
Wenn sich M im Zustand q befindet und unter dem Schreib-/Lesekopf das Zeichen a steht, so geht M im nächsten Schritt in den Zustand q' über, schreibt an die Stelle des a's das Zeichen b und bewegt danach den Schreib-/Lesekopf um eine Position nach rechts (falls $d = R$), links (falls $d = L$) bzw. lässt ihn unverändert (falls $d = N$).

Beispiel 32

Es soll eine TM angegeben werden, die eine gegebene Zeichenreihe aus $\{0,1\}^+$ als Binärzahl interpretiert und zu dieser Zahl 1 addiert. Folgende Vorgehensweise bietet sich an:

1. Gehe ganz nach rechts bis ans Ende der Zahl. Dieses Ende kann durch das erste Auftreten eines Leerzeichens gefunden werden.
2. Gehe wieder nach links bis zur ersten 0 und ändere diese zu einer 1. Ersetze dabei auf dem Weg alle 1en durch 0.

Also:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0,0) &= (q_0,0,R) & \qquad \delta(q_1,1) &= (q_1,0,L)\\
\delta(q_0,1) &= (q_0,1,R) & \qquad \delta(q_1,0) &= (q_f,1,N)\\
\delta(q_0,\Box) &= (q_1,\Box,L) & \qquad \delta(q_1,\Box) &= (q_f,1,N)
\end{aligned}
$$

Damit ist $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$ und $F = \{q_f\}$.

Definition 33

Eine Konfiguration einer Turingmaschine ist ein Tupel $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$.

Das Wort $w = \alpha\beta$ entspricht dem Inhalt des Bandes, wobei dieses rechts und links von w mit dem Leerzeichen $\Box$ gefüllt sei. Der Schreib-/Lesekopf befindet sich auf dem ersten Zeichen von $\beta\Box^\infty$.

Die Startkonfiguration der Turingmaschine bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ entspricht der Konfiguration

$$(\epsilon, q_0, x)\,,$$

d.h. auf dem Band befindet sich genau die Eingabe $x \in \Sigma^*$, der Schreib-/Lesekopf befindet sich über dem ersten Zeichen der Eingabe und die Maschine startet im Zustand q_0.

Je nach aktuellem Bandinhalt und Richtung $d \in \{L, R, N\}$ ergibt sich bei Ausführung des Zustandsübergangs $\delta(q, \beta_1) = (q', c, d)$ folgende Änderung der Konfiguration:

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n, q, \beta_1 \cdots \beta_m) \to \begin{cases} (\alpha_1 \cdots \alpha_n, q', c\beta_2 \cdots \beta_m) & \text{falls } d = N, \\ & n \geq 0, m \geq 1 \\ (\epsilon, q', \Box c\beta_2 \cdots \beta_m) & \text{falls } d = L, \\ & n = 0, m \geq 1 \\ (\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}, q', \alpha_n c\beta_2 \cdots \beta_m) & \text{falls } d = L, \\ & n \geq 1, m \geq 1 \\ (\alpha_1 \cdots \alpha_n c, q', \Box) & \text{falls } d = R, \\ & n \geq 0, m = 1 \\ (\alpha_1 \cdots \alpha_n c, q', \beta_2 \cdots \beta_m) & \text{falls } d = R, \\ & n \geq 0, m \geq 2 \end{cases}$$

Der Fall $m = 0$ wird mittels $\beta_1 = \Box$ abgedeckt.

Definition 34

Die von einer Turingmaschine M akzeptierte Sprache ist

$$L(M) = \{x \in \Sigma^*;\ (\epsilon, q_0, x) \rightarrow^* (\alpha, q, \beta) \text{ mit } q \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$$

Die Turing-Maschine kann

- eine (ggf partielle!) Funktion berechnen
- (formale) Sprachen akzeptieren bzw. erkennen (Sprachakzeptor)

Es gibt viele Variationen der Turing-Maschine, z.B.

- Mehrbandige Turing-Maschine
- Turing-Maschine mit einseitig oder zweiseitig unendlichem Band
- Mehrdimensionale Turing-Maschine
- Mehrköpfige Turing-Maschine
- Turing-Maschine mit separatem Ein- und Ausgabeband
- Online-Turing-Maschine