

2.5 Stationäre Verteilung

Reale dynamische Systeme laufen oft über eine lange Zeit. Für solche Systeme ist es sinnvoll, das Verhalten für $t \rightarrow \infty$ zu berechnen.

Wir betrachten wieder die Markov-Kette aus unserem **Beispiel**. Wir hatten **gezeigt**, dass für die Übergangsmatrix P gilt:

$$P = B \cdot D \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$P^t = B \cdot D^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{7}{10}\right)^t & 0 \\ 0 & 1^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

und für $t \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Für eine beliebige Startverteilung $q_0 = (a, 1 - a)$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} q_t &= \lim_{t \rightarrow \infty} q_0 \cdot P^t = (a, 1 - a) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}(1 - a), \frac{2}{3}a + \frac{2}{3}(1 - a) \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).\end{aligned}$$

Das System konvergiert also **unabhängig vom Startzustand** in eine feste Verteilung. Der zugehörige Zustandsvektor $\pi = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ hat eine interessante Eigenschaft:

$$\pi \cdot P = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \pi.$$

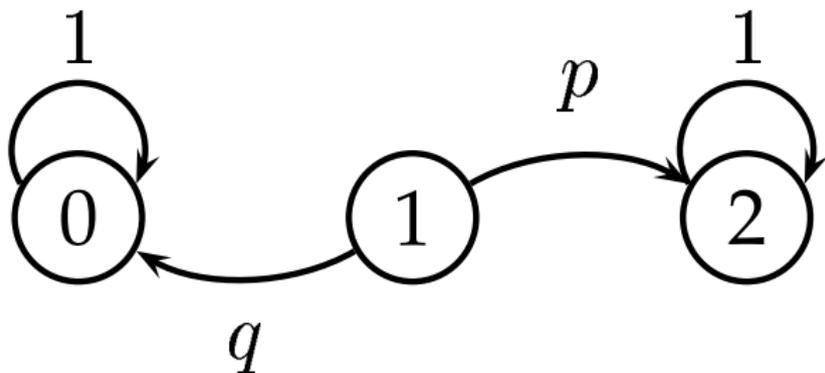
π ist also ein Eigenvektor der Matrix P zum Eigenwert 1 bezüglich Multiplikation von links. Dies bedeutet: Wenn die Kette einmal den Zustandsvektor π angenommen hat, so bleibt dieser bei allen weiteren Übergängen erhalten.

Definition 139

P sei die Übergangsmatrix einer Markov-Kette. Einen Zustandsvektor π mit $\pi = \pi \cdot P$ nennen wir **stationäre Verteilung** der Markov-Kette.

Besitzen alle Markov-Ketten die Eigenschaft, dass sie unabhängig vom Startzustand in eine bestimmte stationäre Verteilung konvergieren?

Nein!



Eine Markov-Kette mit absorbierenden Zuständen

Die Abbildung zeigt die Kette aus dem „gamblers ruin problem“ für $m = 2$. Man sieht sofort, dass hier sowohl $\pi_1 = (1, 0, 0)$ als auch $\pi_2 = (0, 0, 1)$ stationäre Verteilungen sind. Die beiden Zustände 0 und 2 haben jeweils keine ausgehenden Kanten. Solche Zustände heißen **absorbierend**.

Definition 140

Wir bezeichnen einen Zustand i als **absorbierend**, wenn aus ihm keine Übergänge herausführen, d.h. $p_{ij} = 0$ für alle $j \neq i$ und folglich $p_{ii} = 1$.

Ein Zustand i heißt **transient**, wenn $f_i < 1$, d.h. mit positiver Wahrscheinlichkeit $1 - f_i > 0$ kehrt der Prozess nach einem Besuch in i nie mehr dorthin zurück.

Ein Zustand i mit $f_i = 1$ heißt **rekurrent**.

Definition 141

Eine Markov-Kette heißt **irreduzibel**, wenn es für alle Zustandspaare $i, j \in S$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $p_{ij}^{(n)} > 0$.

Die Definition besagt anschaulich, dass jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden kann, wenn man nur genügend viele Schritte durchführt. Dies ist bei endlichen Markov-Ketten genau dann der Fall, wenn der gerichtete Graph des Übergangsdigramms stark zusammenhängend ist.

Lemma 142

Für irreduzible endliche Markov-Ketten gilt: $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$ für alle Zustände $i, j \in S$. Zusätzlich gilt auch, dass die Erwartungswerte $h_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}]$ alle existieren.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Beweis für die Existenz von h_{ij} . Für jeden Zustand k gibt es nach Definition der Irreduzibilität ein n_k , so dass $p_{kj}^{(n_k)} > 0$. Wir halten n_k fest und setzen $n := \max_k n_k$ und $p := \min_k p_{kj}^{(n_k)}$.

Von einem beliebigen Zustand aus gelangen wir nach höchstens n Schritten mit Wahrscheinlichkeit mindestens p nach j . Wir unterteilen die Zeit in Phasen zu n Schritten und nennen eine Phase erfolgreich, wenn während dieser Phase ein Besuch bei j stattgefunden hat. Die Anzahl von Phasen bis zur ersten erfolgreichen Phase können wir durch eine geometrische Verteilung mit Parameter p abschätzen. Die erwartete Anzahl von Phasen ist somit höchstens $1/p$ und wir schließen $h_{ij} \leq (1/p)n$. Daraus folgt sofort, dass auch $f_{ij} = \Pr[T_{ij} < \infty] = 1$. □

Satz 143

Eine irreduzible endliche Markov-Kette besitzt eine eindeutige stationäre Verteilung π und es gilt $\pi_j = 1/h_{jj}$ für alle $j \in S$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass es einen Vektor $\pi \neq 0$ mit $\pi = \pi P$ gibt. Sei $e := (1, \dots, 1)^T$ der Einheitsvektor und I die Einheitsmatrix. Für jede Übergangsmatrix P gilt $P \cdot e = e$, da sich die Einträge der Zeilen von P zu Eins addieren. Daraus folgt $0 = Pe - e = (P - I)e$ und die Matrix $P - I$ ist somit singulär. Damit ist auch die transponierte Matrix $(P - I)^T = P^T - I$ singulär. Es gibt also einen (Spalten-)Vektor $\pi \neq 0$ mit $(P^T - I) \cdot \pi = 0$ bzw. $\pi^T P = \pi^T$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\sum_i \pi_i \neq 0$. Dann können wir o.B.d.A. annehmen, dass π normiert ist, also dass $\sum_i \pi_i = 1$ gilt.

Beweis (Forts.):

Wegen Lemma 142 existieren die Erwartungswerte h_{ij} . Für jeden Zustand $j \in S$ gelten somit nach Lemma 136 die Gleichungen

$$\pi_i h_{ij} = \pi_i \left(1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} h_{kj} \right) \quad \text{für } i \in S, i \neq j.$$

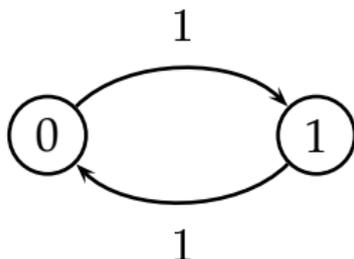
Wir addieren diese Gleichungen und erhalten wegen $\sum_i \pi_i = 1$

$$\begin{aligned} \pi_j h_j + \sum_{i \neq j} \pi_i h_{ij} &= 1 + \sum_{i \in S} \sum_{k \neq j} \pi_i p_{ik} h_{kj} \\ &= 1 + \sum_{k \neq j} h_{kj} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ik} = 1 + \sum_{k \neq j} \pi_k h_{kj}. \end{aligned}$$

Wegen $h_j \geq 1$ ist auch $\pi_j = 1/h_j$ positiv und π stellt somit einen zulässigen Zustandsvektor dar.

Für den Fall $\sum_i \pi_i = 0$ zeigt dieselbe Rechnung wie zuvor, dass $\pi_j = 0$ für alle $j \in S$ gilt. Dies steht im Widerspruch zu $\pi \neq 0$. \square

Auch wenn eine Markov-Kette irreduzibel ist und somit eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt, so muss sie nicht zwangsläufig in diese Verteilung konvergieren.



Eine Markov-Kette mit periodischen Zuständen

Als Startverteilung nehmen wir $q_0 = (1, 0)$ an. Es gilt:

$$q_t = \begin{cases} (1, 0) & \text{falls } t \text{ gerade,} \\ (0, 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Kette pendelt also zwischen den beiden Zustandsvektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ hin und her.

Definition 144

Die **Periode** eines Zustands j ist definiert als die größte Zahl $\xi \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$\{n \in \mathbb{N}_0 \mid p_{jj}^{(n)} > 0\} \subseteq \{i \cdot \xi \mid i \in \mathbb{N}_0\}$$

Ein Zustand mit Periode $\xi = 1$ heißt **aperiodisch**. Wir nennen eine Markov-Kette aperiodisch, wenn alle Zustände aperiodisch sind.

Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $p_{ii}^{(n)} > 0$ genau dann, wenn es im Übergangsdiagramm einen geschlossenen Weg von i nach i der Länge n gibt.

Damit folgt insbesondere:

Ein Zustand $i \in S$ einer endlichen Markov-Kette ist sicherlich dann aperiodisch, wenn er im Übergangsdiagramm

- eine Schleife besitzt (also $p_{ii} > 0$) oder
- auf mindestens zwei geschlossenen Wegen W_1 und W_2 liegt, deren Längen l_1 und l_2 teilerfremd sind (für die also $\text{ggT}(l_1, l_2) = 1$ gilt).

Lemma 145

Ein Zustand $i \in S$ ist genau dann aperiodisch, falls gilt: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $p_{ii}^{(n)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Beweis:

Da je zwei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen teilerfremd sind, folgt aus der Existenz eines n_0 mit der im Lemma angegebenen Eigenschaft sofort die Aperiodizität des Zustands. Nehmen wir daher umgekehrt an, dass der Zustand i aperiodisch ist. Mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus kann man die folgende Aussage zeigen. Für je zwei natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt: Bezeichnet $d := \text{ggT}(a, b)$ den größten gemeinsamen Teiler von a und b , so gibt es für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ nichtnegative Zahlen $x, y \in \mathbb{N}_0$ mit $nd = xa + yb$.

Beweis (Forts.):

Wegen $p_{ii}^{(xa+yb)} \geq (p_{ii}^{(a)})^x \cdot (p_{ii}^{(b)})^y$ folgt daraus unmittelbar: Gilt für $a, b \in \mathbb{N}$, dass sowohl $p_{ii}^{(a)}$ als auch $p_{ii}^{(b)}$ positiv sind, so gilt auch $p_{ii}^{(nd)} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Aus der Aperiodizität des Zustand i folgt andererseits, dass es Werte a_0, \dots, a_k geben muss mit $p_{ii}^{(a_i)} > 0$ und der Eigenschaft, dass für $d_1 = \text{ggT}(a_0, a_1)$ und $d_i := \text{ggT}(d_{i-1}, a_i)$ für $i = 2, \dots, k$ gilt $d_1 > d_2 > \dots > d_k = 1$.

Aus beiden Beobachtungen zusammen folgt die Behauptung. \square

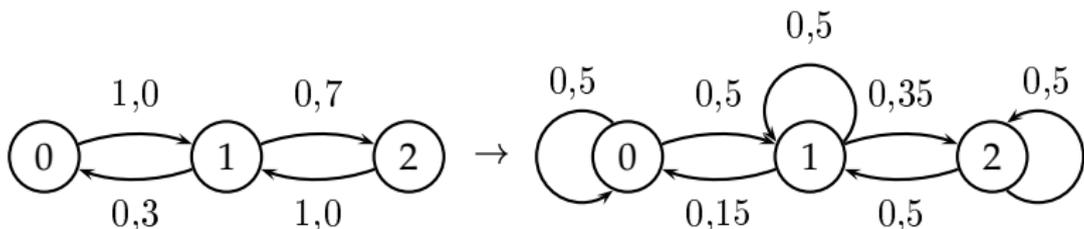
Korollar 146

Für irreduzible, aperiodische endliche Markov-Ketten gilt: Es gibt ein $t \in \mathbb{N}$, so dass unabhängig vom Startzustand $(q_t)_i > 0$ für alle $i \in S$.

Beweis:

Aus der Irreduzibilität folgt, dass die Markov-Kette jeden Zustand $i \in S$ irgendwann besuchen wird. Wegen Lemma 145 wissen wir ferner, dass die Kette hinreichend viele Schritte nach dem ersten Besuch in i in jedem folgenden Zeitschritt mit positiver Wahrscheinlichkeit zu i zurückkehren wird. Da die Kette endlich ist, gibt es daher ein n_0 , so dass die Kette sich unabhängig vom Startzustand für alle $n \geq n_0$ in jedem Zustand $i \in S$ mit positiver Wahrscheinlichkeit aufhält. □

Die **Aperiodizität** einer irreduziblen Markov-Kette kann auf einfache Weise sichergestellt werden. Man fügt an alle Zustände so genannte **Schleifen** an. Diese versieht man mit der Übergangswahrscheinlichkeit $p = 1/2$ und halbiert die Wahrscheinlichkeiten an allen übrigen Kanten.



Einführung von Schleifen

Bei irreduziblen Ketten genügt es, eine einzige Schleife einzuführen, um die Aperiodizität der Kette sicherzustellen.

Definition 147

Irreduzible, aperiodische Markov-Ketten nennt man **ergodisch**.

Satz 148 (Fundamentalsatz für ergodische Markov-Ketten)

Für jede ergodische endliche Markov-Kette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ gilt
unabhängig vom Startzustand

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \pi,$$

wobei π die eindeutige stationäre Verteilung der Kette bezeichnet.

Beweis:

Gemäß Satz 143 existiert eine stationäre Verteilung π . Wir zeigen, dass für beliebige Zustände i und k gilt

$$p_{ik}^{(n)} \rightarrow \pi_k \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt die Behauptung, da

$$(q_n)_k = \sum_{i \in S} (q_0)_i \cdot p_{ik}^{(n)} \rightarrow \pi_k \cdot \sum_{i \in S} (q_0)_i = \pi_k.$$

Beweis (Forts.):

$(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ sei eine unabhängige Kopie der Kette $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$. Für den Prozess $Z_t := (X_t, Y_t)$ ($t \in \mathbb{N}_0$), bei dem die Ketten X_t und Y_t gewissermaßen „parallel“ betrieben werden, gilt also

$$\begin{aligned} \Pr[(X_{t+1}, Y_{t+1}) = (j_x, j_y) \mid (X_t, Y_t) = (i_x, i_y)] \\ &= \Pr[X_{t+1} = j_x \mid X_t = i_x] \cdot \Pr[Y_{t+1} = j_y \mid Y_t = i_y] \\ &= p_{i_x j_x} \cdot p_{i_y j_y}. \end{aligned}$$

$(Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist daher ebenfalls eine Markov-Kette. Für die Wahrscheinlichkeit, in n Schritten von (i_x, i_y) nach (j_x, j_y) zu gelangen, erhält man analog $p_{i_x j_x}^{(n)} p_{i_y j_y}^{(n)}$, was für genügend großes n gemäß Lemma 145 positiv ist. $(Z_t)_{t_0 \in \mathbb{N}}$ ist daher ebenfalls ergodisch.

Beweis (Forts.):

Wir starten nun Z_t so, dass die Ketten X_t und Y_t in verschiedenen Zuständen i_x bzw. i_y beginnen, und interessieren uns für den Zeitpunkt H , bei dem sich X_t und Y_t zum ersten Mal im gleichen Zustand befinden.

Die Menge der Zustände von Z_t ist gegeben durch $S \times S$. Wir definieren die Menge

$$M := \{(x, y) \in S \times S \mid x = y\}.$$

von Zuständen der Kette Z_t , an denen sich X_t und Y_t „treffen“. Definieren wir nun die Treffzeit H durch

$$H := \max\{T_{(i_x, i_y), (j_x, j_y)} \mid (i_x, i_y) \in S \times S, (j_x, j_y) \in M\},$$

so folgt aus Lemma 142 und der Endlichkeit der Markov-Kette sofort, dass $\Pr[H < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[H] < \infty$.

Beweis (Forts.):

Da die weitere Entwicklung der Ketten X_t und Y_t ab dem Zeitpunkt H nur vom Zustand $X_H = Y_H$ und der Übergangsmatrix abhängt, wird jeder Zustand $s \in S_Z$ zu den Zeiten $t \geq H$ von X_t und Y_t mit derselben Wahrscheinlichkeit angenommen. Es gilt also $\Pr[X_t = s \mid t \geq H] = \Pr[Y_t = s \mid t \geq H]$ und somit auch

$$\Pr[X_t = s, t \geq H] = \Pr[Y_t = s, t \geq H]. \quad (12)$$

Als Startzustand wählen wir für die Kette X_t den Zustand i , während Y_t in der stationären Verteilung π beginnt (und natürlich auch bleibt). Damit erhalten wir für einen beliebigen Zustand $k \in S$ und $n \geq 1$

$$\begin{aligned} |p_{ik}^{(n)} - \pi_k| &= |\Pr[X_n = k] - \Pr[Y_n = k]| \\ &= |\Pr[X_n = k, n \geq H] + \Pr[X_n = k, n < H] \\ &\quad - \Pr[Y_n = k, n \geq H] - \Pr[Y_n = k, n < H]|. \end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Nun können wir (12) anwenden und schließen, dass

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| = |\Pr[X_n = k, n < H] - \Pr[Y_n = k, n < H]|.$$

Zur Abschätzung dieses Ausdrucks benutzen wir die Abschätzung

$$|\Pr[A \cap B] - \Pr[A \cap C]| \leq \Pr[A].$$

für beliebige Ereignisse A , B und C (die offensichtlich ist).

Wir erhalten

$$|p_{ik}^{(n)} - \pi_k| = \Pr[n < H].$$

Da $\Pr[H < \infty] = 1$, gilt $\Pr[n < H] \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, d.h. die Wahrscheinlichkeiten $p_{ik}^{(n)}$ konvergieren für $n \rightarrow \infty$ gegen π_k . \square