

SS 2006

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2006SS/ds2/>

Sommersemester 2006

Aus der Darstellung in Lemma 22 folgt die wichtige Beobachtung, dass für zwei unabhängige Ereignisse A und B auch die Ereignisse \bar{A} und B (und analog auch A und \bar{B} bzw. \bar{A} und \bar{B}) unabhängig sind!

Ebenso folgt:

Lemma 23

Seien A , B und C unabhängige Ereignisse. Dann sind auch $A \cap B$ und C bzw. $A \cup B$ und C unabhängig.

Beweis:

Zur Unabhängigkeit von $A \cap B$ und C siehe das vorangehende Beispiel.

Aus

$$\begin{aligned}\Pr[(A \cup B) \cap C] &= \Pr[(A \cap C) \cup (B \cap C)] \\ &= \Pr[A \cap C] + \Pr[B \cap C] - \Pr[A \cap B \cap C] \\ &= \Pr[C] \cdot (\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]) \\ &= \Pr[A \cup B] \cdot \Pr[C]\end{aligned}$$

folgt die Unabhängigkeit von $A \cup B$ und C . □

4. Zufallsvariablen

4.1 Grundlagen

Anstatt der Ereignisse selbst sind wir oft an „Auswirkungen“ oder „Merkmale“ der (Elementar)Ereignisse interessiert.

Definition 24

Sei ein Wahrscheinlichkeitsraum auf der Ergebnismenge Ω gegeben. Eine Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

heißt (numerische) Zufallsvariable.

Eine Zufallsvariable X über einer endlichen oder abzählbar unendlichen Ergebnismenge Ω heißt **diskret**.

Bei diskreten Zufallsvariablen ist der Wertebereich

$$W_X := X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}; \exists \omega \in \Omega \text{ mit } X(\omega) = x\}$$

ebenfalls wieder endlich (bzw. abzählbar unendlich).

Beispiel 25

Wir werfen eine ideale Münze drei Mal. Als Ergebnismenge erhalten wir $\Omega := \{H, T\}^3$. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Gesamtanzahl der Würfe mit Ergebnis „Head“.

Beispielsweise gilt also $Y(HTH) = 2$ und $Y(HHH) = 3$. Y hat den Wertebereich $W_Y = \{0, 1, 2, 3\}$.

Für $W_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ bzw. $W_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ betrachten wir (für ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ bzw. $x_i \in \mathbb{N}$) das Ereignis

$$A_i := \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\} = X^{-1}(x_i).$$

Bemerkung: Anstelle von $\Pr[X^{-1}(x_i)]$ verwendet man häufig auch die Schreibweise $\Pr[„X = x_i“]$. Analog setzt man

$$\begin{aligned} \Pr[„X \leq x_i“] &= \sum_{x \in W_X : x \leq x_i} \Pr[„X = x“] \\ &= \Pr[\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x_i\}]. \end{aligned}$$

Oft lässt man auch die Anführungszeichen weg.

Definition 26

- Die Funktion

$$f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X = x] \in [0, 1] \quad (4)$$

nennt man **(diskrete) Dichte(funktion)** der Zufallsvariablen X .

- Die Funktion

$$F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto \Pr[X \leq x] = \sum_{x \in W_X : x' \leq x} \Pr[X = x'] \in [0, 1] \quad (5)$$

heißt **Verteilung(sfunktion)** der Zufallsvariablen X .

Beispiel 27

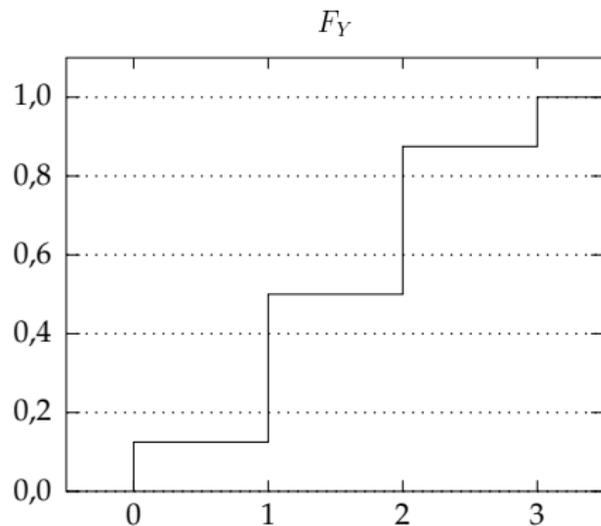
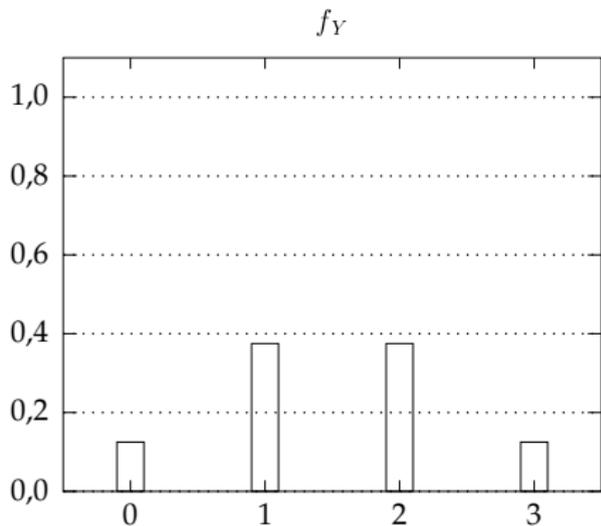
Für die Zufallsvariable Y erhalten wir

$$\Pr[Y = 0] = \Pr[TTT] = \frac{1}{8},$$

$$\Pr[Y = 1] = \Pr[HTT] + \Pr[THT] + \Pr[TTH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 2] = \Pr[HHT] + \Pr[HTH] + \Pr[THH] = \frac{3}{8},$$

$$\Pr[Y = 3] = \Pr[HHH] = \frac{1}{8}.$$



Dichte und Verteilung von Y

Bemerkung: Man kann statt Ω auch den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum über W_X betrachten.

4.2 Erwartungswert und Varianz

Definition 28

Zu einer Zufallsvariablen X definieren wir den **Erwartungswert** $\mathbb{E}[X]$ durch

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x),$$

sofern $\sum_{x \in W_X} |x| \cdot \Pr[X = x]$ konvergiert.

Beispiel 29

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{i=0}^3 i \cdot \Pr[Y = i] \\ &= 1 \cdot \Pr[Y = 1] + 2 \cdot \Pr[Y = 2] + 3 \cdot \Pr[Y = 3] \\ &= 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Beispiel 30

Eine Münze wird so lange geworfen, bis sie zum ersten Mal „Head“ zeigt. Sei k die Anzahl der durchgeführten Würfe. Wenn k ungerade ist, zahlt der Spieler an die Bank k Euro. Andernfalls (k gerade) zahlt die Bank k Euro an den Spieler.

$$G := \begin{cases} k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -k & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wie schon gesehen, gilt dann

$$\Pr[\text{„Anzahl Würfe} = k\text{“}] = (1/2)^k .$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

Da

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^{k-1} \cdot k| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[G]$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[G] &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[(2j-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} - 2j \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2j} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2j-1} \cdot [(2j-1) - j] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (j-1) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{j-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Wird jedoch, um das Risiko zu steigern, der zu zahlende Betrag von k Euro jeweils auf 2^k Euro erhöht, also

$$G' := \begin{cases} 2^k & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -2^k & \text{falls } k \text{ gerade,} \end{cases}$$

dann existiert $\mathbb{E}[G']$ nicht, da

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[G'] &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = +1 - 1 + 1 - 1 + - \dots \end{aligned}$$

Berechnung des Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x) \\ &= \sum_{x \in W_X} x \sum_{\omega \in \Omega: X(\omega)=x} \Pr[\omega] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] .\end{aligned}$$

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen ist dabei analog zur Definition des Erwartungswerts erforderlich, dass $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| \cdot \Pr[\omega]$ konvergiert (**absolute** Konvergenz).

Satz 31 (Monotonie des Erwartungswerts)

Seien X und Y Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$.

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \leq \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \cdot \Pr[\omega] = \mathbb{E}[Y].$$

□

Aus Satz 31 folgt insbesondere, dass $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$ gilt, wenn für die Zufallsvariable X die Eigenschaft $a \leq X(\omega) \leq b$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt ist.