

SS 2006

Diskrete Strukturen II

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

<http://www14.in.tum.de/lehre/2006SS/ds2/>

Sommersemester 2006

Für $\Pr[A|B]$ erforderliche Eigenschaften:

- 1 $\Pr[B|B] = 1$;
- 2 $\Pr[A|\Omega] = \Pr[A]$;
- 3 für festes B ist $\Pr[A|B]$ proportional zu $\Pr[A \cap B]$.

Definition 12

A und B seien Ereignisse mit $\Pr[B] > 0$. Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $\Pr[A|B]$ von A gegeben B ist definiert als

$$\Pr[A|B] := \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} .$$

Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[\cdot|B]$ bilden für ein beliebiges Ereignis $B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[B] > 0$ einen neuen Wahrscheinlichkeitsraum über Ω .

Es ist leicht nachzurechnen, dass dadurch die Definition eines *diskreten Wahrscheinlichkeitsraums* erfüllt ist:

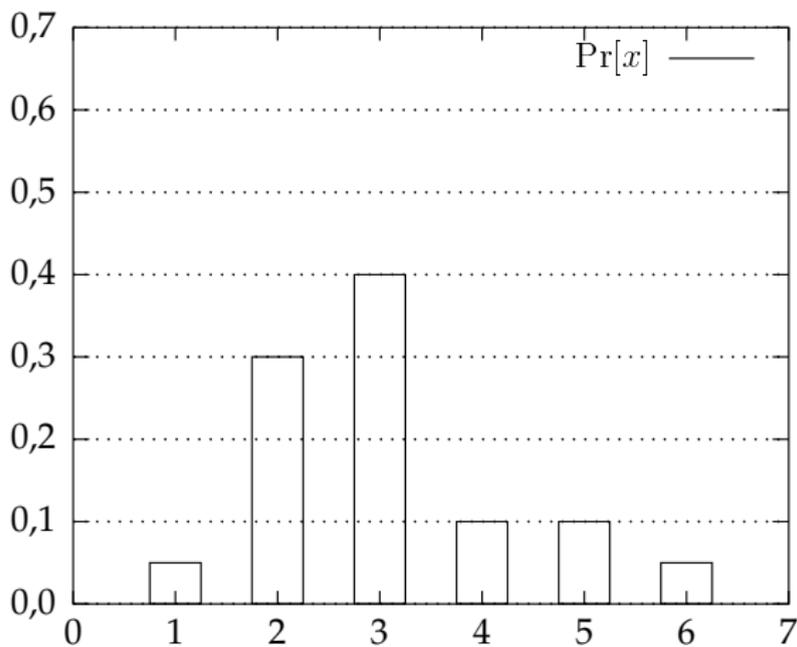
$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega|B] = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\Pr[\omega \cap B]}{\Pr[B]} = \sum_{\omega \in B} \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B]}{\Pr[B]} = 1.$$

Damit gelten alle Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten auch für bedingte Wahrscheinlichkeiten. Beispielsweise:

$$\Pr[\emptyset|B] = 0 \text{ sowie } \Pr[\bar{A}|B] = 1 - \Pr[A|B].$$

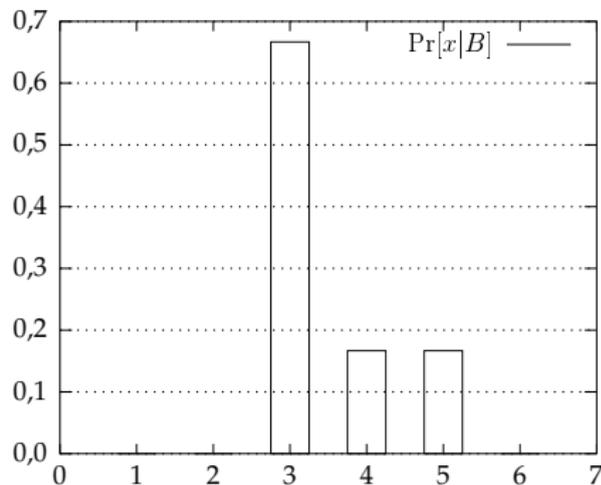
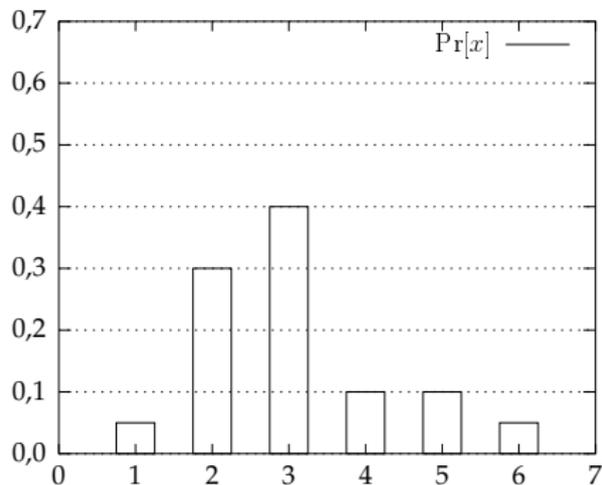
Beispiel 13 (Reskalierung bei bedingten Wahrscheinlichkeiten)

Betrachte folgenden **gezinkten** Würfel:



Beispiel 13 (Forts.)

Wir betrachten nun den durch $B := \{3, 4, 5\}$ gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeitsraum:



Was genau war die Bedingung?

Beispiel 14 (Zweikinderproblem)

Wir nehmen an, dass bei der Geburt eines Kindes beide Geschlechter gleich wahrscheinlich sind. Wir wissen, dass eine bestimmte Familie zwei Kinder hat und eines davon ein Mädchen ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder der Familie Mädchen sind?

Natürlich $\frac{1}{2}$.

Wirklich?

Beispiel 14 (Forts.)

Eigentlich gilt:

$$\Omega := \{mm, mj, jm, jj\}$$

und

$$M := \{mm, mj, jm\} .$$

Wir bedingen auf M , und damit gilt für $A := \{mm\}$:

$$\Pr[A|M] = \frac{\Pr[A \cap M]}{\Pr[M]} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$

Häufig verwendet man die Definition der **bedingten Wahrscheinlichkeit** in der Form

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B] . \quad (1)$$

Damit:

Satz 15 (Multiplikationssatz)

Seien die Ereignisse A_1, \dots, A_n gegeben. Falls $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0$ ist, gilt

$$\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}] .$$

Beweis:

Zunächst halten wir fest, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, da

$$\Pr[A_1] \geq \Pr[A_1 \cap A_2] \geq \dots \geq \Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n] > 0.$$

Die rechte Seite der Aussage im Satz können wir umschreiben zu

$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \dots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]}.$$

Offensichtlich kürzen sich alle Terme bis auf $\Pr[A_1 \cap \dots \cap A_n]$. \square

Beispiel 16 (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m -köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulierung:

Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in n Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Für das Geburtstagsproblem: $n = 365$

Offensichtlich muss $m \leq n$ sein, damit überhaupt jeder Ball allein in einem Korb liegen kann.

Wir nehmen an, dass die Bälle nacheinander geworfen werden.

A_i bezeichne das Ereignis „Ball i landet in einem noch leeren Korb“. Das gesuchte Ereignis „Alle Bälle liegen allein in einem Korb“ bezeichnen wir mit A . Nach Satz 15 können wir $\Pr[A]$ berechnen durch

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr\left[\bigcap_{i=1}^m A_i\right] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \dots \cdot \Pr[A_m|\bigcap_{i=1}^{m-1} A_i].\end{aligned}$$

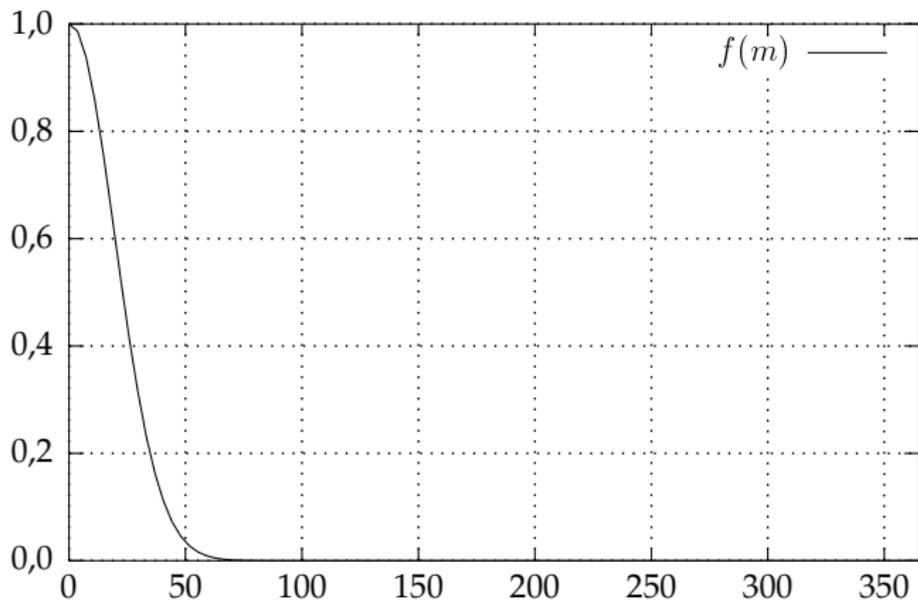
Unter der Bedingung, dass die ersten $j - 1$ Bälle jeweils in einer leeren Urne gelandet sind, bedeutet A_j , dass der j -te Ball in eine der $n - (j - 1)$ leeren Urnen fallen muss, die aus Symmetriegründen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Daraus folgt

$$\Pr[A_j | \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n - (j - 1)}{n} = 1 - \frac{j - 1}{n}.$$

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ und wegen $\Pr[A_1] = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Pr[A] &= \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{j-1}{n} \right) \\ &\leq \prod_{j=2}^m e^{-(j-1)/n} = e^{-(1/n) \cdot \sum_{j=1}^{m-1} j} \\ &= e^{-m(m-1)/(2n)} =: f(m). \end{aligned}$$



Verlauf

von $f(m)$ für $n = 365$

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1 zeigen wir:

Satz 17 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^n \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] .$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \dots \cup (B \cap A_n).$$

Da für beliebige i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, sind auch die Ereignisse $B \cap A_i$ und $B \cap A_j$ disjunkt. Wegen (1) folgt $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (auch für den Fall, dass $\Pr[A_i] = 0!$). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 5) an

$$\begin{aligned} \Pr[B] &= \Pr[B \cap A_1] + \dots + \Pr[B \cap A_n] = \\ &\Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \dots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n] \end{aligned}$$

und haben damit die Behauptung gezeigt. Da der Additionssatz auch für unendlich viele Ereignisse A_1, A_2, \dots gilt, kann dieser Beweis direkt auf den unendlichen Fall übertragen werden. \square

Mit Hilfe von Satz 17 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

Satz 18 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n seien paarweis disjunkt, mit $\Pr[A_j] > 0$ für alle j . Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$ ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, \dots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^n \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse A_1, A_2, \dots mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von B unter den Bedingungen A_i (sowie die Wahrscheinlichkeiten der A_i selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von A_i bedingt auf das Ereignis B .

Thomas Bayes (1702–1761) war ein bekannter Theologe und Mitglied der Royal Society. Als sein bedeutendstes Werk gilt sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. Diese Arbeit wurde erst 1763 publiziert.

3. Unabhängigkeit

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ kann der Fall auftreten, dass die Bedingung auf B , also das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten. Es gilt also $\Pr[A|B] = \Pr[A]$, und wir nennen dann die Ereignisse A und B **unabhängig**.

Beispiel 19 (Zweimaliges Würfeln)

$$\Omega := \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\} .$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.

Wir definieren die Ereignisse

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Es gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$. Wie groß ist $\Pr[B|A]$?

Beispiel 19 (Forts.)

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von A keine Information in Bezug auf das Ereignis B hinzu:

$$B \cap A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}.$$

Daraus folgt

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B].$$

Das Eintreffen des Ereignisses B hat mit dem Ereignis A „nichts zu tun“.

Definition 20

Die Ereignisse A und B heißen **unabhängig**, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Falls $\Pr[B] \neq 0$, so können wir diese Definition zu

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$$

umschreiben.

Beispiel 19 (Zweimaliges Würfeln, Forts.)

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Bei den Ereignissen A und B ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit A und C ?

$$A \cap C = \{(2, 5), (4, 3), (6, 1)\}$$

und damit

$$\Pr[A \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \text{ bzw. } \Pr[C|A] = \Pr[C].$$

Beispiel 19 (Forts.)

Also sind auch A und C (und analog B und C) unabhängig.

Bemerkung: Im Beispiel ist $A \cap C \neq \emptyset$.

Es gilt sogar allgemein für zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $\Pr[A], \Pr[B] > 0$, dass sie gar nicht disjunkt sein können, da ansonsten

$$0 = \Pr[\emptyset] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] .$$

Beispiel 19 (Zweimaliges Würfeln (Forts.))

Zur Erinnerung:

$A :=$ Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,

$B :=$ Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,

$C :=$ Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.

Wir betrachten das Ereignis $A \cap B \cap C$. Wenn $A \cap B$ eintritt, so sind beide gewürfelten Augenzahlen gerade und somit ergibt auch die Summe davon eine gerade Zahl. Daraus folgt

$\Pr[A \cap B \cap C] = 0$ bzw. $\Pr[C|A \cap B] = 0 \neq \Pr[C]$. Das Ereignis $A \cap B$ liefert uns also Information über das Ereignis C .

Definition 21

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n heißen **unabhängig**, wenn für alle Teilmengen $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \quad (2)$$

Eine unendliche Familie von Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn (2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.

Lemma 22

Die Ereignisse A_1, \dots, A_n sind genau dann unabhängig, wenn für alle $(s_1, \dots, s_n) \in \{0, 1\}^n$ gilt, dass

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}], \quad (3)$$

wobei $A_i^0 = \bar{A}_i$ und $A_i^1 = A_i$.

Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass aus (2) die Bedingung (3) folgt. Wir beweisen dies durch Induktion über die Anzahl der Nullen in s_1, \dots, s_n . Wenn $s_1 = \dots = s_n = 1$ gilt, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelte ohne Einschränkung $s_1 = 0$. Aus dem Additionssatz folgt dann

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &\quad - \Pr[A_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}].\end{aligned}$$

Darauf können wir die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{A}_1 \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] &= \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] - \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= (1 - \Pr[A_1]) \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}],\end{aligned}$$

woraus die Behauptung wegen $1 - \Pr[A_1] = \Pr[\bar{A}_1]$ folgt.

Für die Gegenrichtung zeigen wir nur, dass aus (3)
 $\Pr[A_1 \cap A_2] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$ folgt. Es gilt wegen des Satzes von
der totalen Wahrscheinlichkeit, dass

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cap A_2] &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3^{s_3} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] \\ &= \sum_{s_3, \dots, s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2] \cdot \sum_{s_3 \in \{0,1\}} \Pr[A_3^{s_3}] \cdot \dots \cdot \sum_{s_n \in \{0,1\}} \Pr[A_n^{s_n}] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2],\end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. □