

**SS 2004**

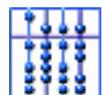
# **Diskrete Strukturen II**

**Ernst W. Mayr**

**Fakultät für Informatik**

**TU München**

<http://www14.in.tum.de/lehre/2004SS/ds/index.html.de>

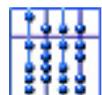


# Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

**Erinnerung:** Die Poisson-Verteilung lässt sich als Grenzwert der Binomialverteilung darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen  $X_n$  mit Parameter  $p_n = \lambda/n$ . Für ein beliebiges  $k \in \mathbb{N}$  ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_n \leq k \cdot n$ , gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \leq kn] &= \sum_{i=1}^{kn} (1 - p_n)^{i-1} \cdot p_n = p_n \cdot \sum_{i=0}^{kn-1} (1 - p_n)^i \\ &= p_n \cdot \frac{1 - (1 - p_n)^{kn}}{p_n} = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{kn}.\end{aligned}$$



Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$  gilt daher für die Zufallsvariablen  $Y_n := \frac{1}{n}X_n$ , dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Y_n \leq t] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[X_n \leq t \cdot n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{tn} \\ &= 1 - e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Die Folge  $Y_n$  der (skalierten) geometrisch verteilten Zufallsvariablen geht also für  $n \rightarrow \infty$  in eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter  $\lambda$  über.



## 2.3 Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

### Mehrdimensionale Dichten

**Definition:** Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen  $X, Y$  wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über  $\mathbb{R}^2$  durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion

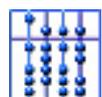
$f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy = 1$$

beschrieben.

Für ein Ereignis  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

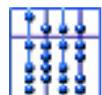
$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy.$$



Unter einem Bereich  $B$  verstehen wir dabei Mengen der Art

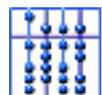
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dabei können die einzelnen Intervallgrenzen auch „offen“ sein.



Analog zum eindimensionalen Fall ordnen wir der Dichte  $f_{X,Y}$  eine (gemeinsame) Verteilung  $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  zu:

$$F_{X,Y}(x, y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) \, du \, dv.$$



# Randverteilungen und Unabhängigkeit

**Definition:** Sei  $f_{X,Y}$  die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ . Die **Randverteilung** der Variablen  $X$  ist gegeben durch

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^x \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v) \, dv \right] \, du.$$

Analog nennen wir

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) \, dv$$

die **Randdichte** von  $X$ . Entsprechende Definitionen gelten symmetrisch für  $Y$ .



## Definition:

Zwei kontinuierliche Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  heißen **unabhängig**, wenn

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq y]$$

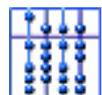
für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Differentiation ergibt

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$



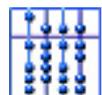
Für mehrere Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  gilt analog:  $X_1, \dots, X_n$  sind genau dann unabhängig, wenn

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

bzw.

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .



# Warteprobleme mit der Exponentialverteilung

## Warten auf mehrere Ereignisse.

**Satz 41:** Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und exponentialverteilt mit den Parametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Dann ist auch  $X := \min\{X_1, \dots, X_n\}$  exponentialverteilt mit dem Parameter  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

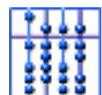
Beweis: Der allgemeine Fall folgt mittels Induktion aus dem für  $n = 2$ . Für die Verteilungsfunktion  $F_X$  gilt:

$$\begin{aligned} 1 - F_X(t) &= \Pr[X > t] = \Pr[\min\{X_1, X_2\} > t] \\ &= \Pr[X_1 > t, X_2 > t] \\ &= \Pr[X_1 > t] \cdot \Pr[X_2 > t] \\ &= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}. \end{aligned}$$

*q. e. d.*



Anschaulich besagt Satz 41, dass sich die Raten addieren, wenn man auf das erste Eintreten eines Ereignisses aus mehreren unabhängigen Ereignissen wartet. Wenn beispielsweise ein Atom die Zerfallsrate  $\lambda$  besitzt, so erhalten wir bei  $n$  Atomen die Zerfallsrate  $n\lambda$  (wie uns auch die Intuition sagt).



# Poisson-Prozess.

Wir hatten bei der Diskussion der geometrischen und der Poisson-Verteilung festgestellt:

Wenn der zeitliche Abstand der Treffer geometrisch verteilt ist, so ist ihre Anzahl in einer festen Zeitspanne binomialverteilt.

Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$ , wobei wir die Trefferwahrscheinlichkeit mit  $p_n = \lambda/n$  ansetzen, konvergiert die Binomialverteilung gegen die Poisson-Verteilung und die geometrische Verteilung gegen die Exponentialverteilung konvergiert. Im Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  erwarten wir deshalb die folgende Aussage:

Wenn man Ereignisse zählt, deren zeitlicher Abstand exponentialverteilt ist, so ist die Anzahl dieser Ereignisse in einer festen Zeitspanne Poisson-verteilt.

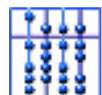


Seien  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$ . Die Zufallsvariable  $T_i$  modelliert die Zeit, die zwischen Treffer  $i - 1$  und  $i$  vergeht.

Für den Zeitpunkt  $t > 0$  definieren wir

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_1 + \dots + T_n \leq t\}.$$

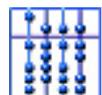
$X(t)$  gibt also an, wie viele Treffer sich bis zur Zeit  $t$  (von Zeit Null ab) ereignet haben. Es gilt:



**Fakt 42:**

Seien  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige Zufallsvariablen und sei  $X(t)$  für  $t > 0$  wie oben definiert. Dann gilt:  $X(t)$  ist genau dann Poisson-verteilt mit Parameter  $t\lambda$ , wenn es sich bei  $T_1, T_2, \dots$  um exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter  $\lambda$  handelt.

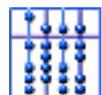
Zum Zufallsexperiment, das durch  $T_1, T_2, \dots$  definiert ist, erhalten wir für jeden Wert  $t > 0$  eine Zufallsvariable  $X(t)$ . Hierbei können wir  $t$  als Zeit interpretieren und  $X(t)$  als Verhalten des Experiments zur Zeit  $t$ . Eine solche Familie  $(X(t))_{t>0}$  von Zufallsvariablen nennt man allgemein einen stochastischen Prozess. Der hier betrachtete Prozess, bei dem  $T_1, T_2, \dots$  unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen sind, heißt **Poisson-Prozess** und stellt ein fundamentales und zugleich praktisch sehr bedeutsames Beispiel für einen stochastischen Prozess dar.



**Beispiel:** Wir betrachten eine Menge von Jobs, die auf einem Prozessor sequentiell abgearbeitet werden. Die Laufzeiten der Jobs seien unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter  $\lambda = 1/30[1/s]$ . Jeder Job benötigt also im Mittel  $30s$ .

Gemäß Fakt 42 ist die Anzahl von Jobs, die in einer Minute vollständig ausgeführt werden, Poisson-verteilt mit Parameter  $t\lambda = 60 \cdot (1/30) = 2$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Minute höchstens ein Job abgearbeitet wird, beträgt  $e^{-t\lambda} + t\lambda e^{-t\lambda} \approx 0,406$ .



# Summen von Zufallsvariablen

## Satz 43:

Seien  $X$  und  $Y$  unabhängige kontinuierliche Zufallsvariablen. Für die Dichte von  $Z := X + Y$  gilt

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z - x) \, dx.$$

Beweis: Nach Definition der Verteilungsfunktion gilt

$$F_Z(t) = \Pr[Z \leq t] = \Pr[X + Y \leq t] = \int_{A(t)} f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy$$

wobei  $A(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq t\}$ .



Aus der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  folgt

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \int_{A(t)} f_X(x) \cdot f_Y(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \left( \int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) \, dy \right) \, dx. \end{aligned}$$

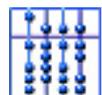
Mittels der Substitution  $z := x + y$ ,  $dz = dy$  ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y) \, dy = \int_{-\infty}^t f_Y(z - x) \, dz$$

und somit

$$F_Z(t) = \int_{-\infty}^t \left( \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z - x) \, dx \right) \, dz.$$

*q. e. d.*



## Satz 44: (Additivität der Normalverteilung)

Die Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  seien unabhängig und normalverteilt mit den Parametern  $\mu_i, \sigma_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Es gilt: Die Zufallsvariable

$$Z := a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$$

ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n$  und Varianz  $\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$ .

Beweis: Wir beweisen zunächst den Fall  $n = 2$  und  $a_1 = a_2 = 1$ . Nach Satz 43 gilt für  $Z := X_1 + X_2$ , dass

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(z-y) \cdot f_{X_2}(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{(z-y-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}_{=:v}\right) \, dy. \end{aligned}$$



Wir setzen

$$\begin{aligned}\mu &:= \mu_1 + \mu_2 \\ \sigma^2 &:= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ v_1 &:= (z - \mu) / \sigma \\ v_2^2 &:= v - v_1^2\end{aligned}$$

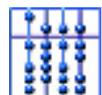
Damit ergibt sich

$$v_2^2 = \frac{(z - y - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} - \frac{(z - \mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

woraus wir

$$v_2 = \frac{y\sigma_1^2 - \mu_2\sigma_1^2 + y\sigma_2^2 - z\sigma_2^2 + \mu_1\sigma_2^2}{\sigma_1\sigma_2\sigma}$$

ermitteln.



Damit folgt für die gesuchte Dichte

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2} \cdot \exp\left(-\frac{v_1^2}{2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v_2^2}{2}\right) d y.$$

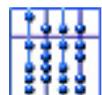
Wir substituieren noch

$$t := v_2 \text{ und } d t = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma_2} d y$$

und erhalten

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(z - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) d t.$$

Mit Lemma 35 folgt, dass  $f_Z(z) = \varphi(z; \mu, \sigma)$  ist.



Daraus erhalten wir die Behauptung für  $n = 2$ , denn den Fall  $Z := a_1X_1 + a_2X_2$  für beliebige Werte  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  können wir leicht mit Hilfe von Satz 36 auf den soeben bewiesenen Fall reduzieren. Durch Induktion kann die Aussage auf beliebige Werte  $n \in \mathbb{N}$  verallgemeinert werden. *q. e. d.*



# Momenterzeugende Funktionen für kontinuierliche Zufallsvariablen

Für diskrete Zufallsvariablen  $X$  haben wir die momenterzeugende Funktion

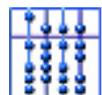
$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

eingeführt. Diese Definition kann man unmittelbar auf kontinuierliche Zufallsvariablen übertragen. Die für  $M_X(s)$  gezeigten Eigenschaften bleiben dabei erhalten.



Beispiel: Für eine auf  $[a, b]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $U$  gilt

$$\begin{aligned} M_U(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_a^b e^{tx} \cdot \frac{1}{b-a} dx \\ &= \left[ \frac{e^{tx}}{t(b-a)} \right]_a^b \\ &= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}. \end{aligned}$$



Für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable

$N \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gilt

$$\begin{aligned} M_N(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t\xi} e^{-\xi^2/2} d\xi \\ &= e^{t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\xi)^2/2} d\xi \\ &= e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  wegen

$$\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathbb{E}[e^{tY}] \\ &= e^{t\mu} \cdot \mathbb{E}\left[e^{(t\sigma) \cdot \frac{Y-\mu}{\sigma}}\right] \\ &= e^{t\mu} \cdot M_N(t\sigma) \\ &= e^{t\mu + (t\sigma)^2/2}. \end{aligned}$$

