
Diskrete Strukturen I

35. Rekursion I

Lösen Sie die Rekursion $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n \forall n \geq 0$.

36. Rekursion II

Gegeben die Rekursionsgleichung $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0 \forall n \geq 2$ mit variablen Anfangsbedingungen $a_0 = a$ und $a_1 = b$.

- Bestimmen Sie die vollständige Rekursion.
- Zeigen Sie, dass $A(z) = \frac{a+(b-4a)z}{1-4z+4z^2}$ die Erzeugendenfunktion der Rekursionsgleichung ist.
- Zeigen Sie, dass $a_n = \left(\left(\frac{b}{2} - a\right)n + a\right) 2^n$

37. Exponentiellerzeugende

- a) Sei

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$$

die zur Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ gehörige *exponentielle Erzeugendenfunktion*. Zeigen Sie, dass $G'(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{z^n}{n!}$

- b) Zeigen Sie: Für die exponentielle Erzeugendenfunktion der Rekursion

$$a_0 = 1 \quad a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^k}$$

gilt: $G(z) = e^{2z}$. Geben Sie eine explizite Darstellung der a_n an.

(Hinweis: $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$.)

38. Graphzusammenhang

Gibt es für jedes $n \geq 2$ einen unzusammenhängenden (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ mit n Knoten und $m > \binom{n-1}{2}$ Kanten? (Begründen Sie Ihre Antwort!)