

---

## Diskrete Strukturen II

---

### Aufgabe 1

Das Computeralgebra-Programm Maple ist auf den TU-Rechnern installiert und eine große Hilfe im Leben allgemein sowie bei vielerlei Rechnungen. Zum Thema “Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik mit Maple” finden Sie zwei sehr gute Einführungen unter <http://www.engineering.usu.edu/cee/faculty/gurro/MyBooks/MapleStatIntro.pdf> sowie unter <http://www.mas.ncl.ac.uk/~ndjw1/teaching/maple/>. Ein Tutorial zur Matrizenrechnung mit Maple finden Sie z. B. unter <http://oregonstate.edu/~peterseb/maple/docs/341mp.pdf>. Bitte machen Sie sich mit den Grundfunktionen vertraut, und lösen Sie dann folgende Aufgabe mit Hilfe von Maple: Gegeben eine Indikatorvariable  $I$  und eine Variable  $X \in \{A, C, G, T\}$ .<sup>1</sup> Wir beobachten nun  $I$  und  $X$  und erhalten dabei folgende Tabelle mit den Häufigkeiten gemeinsamen Auftretens:

	X=“A”	X=“C”	X=“G”	X=“T”
I=1	1240	1558	210	1250
I=0	1301	1695	165	1200

Machen Sie einen  $\chi^2$ -Test, der mit 99%-iger Sicherheit die Hypothese “ $H_0$ :  $I$  und  $X$  sind unabhängig” verwirft, wenn Sie falsch ist.

(Hinweis: Für Aufgabe 4 sollten Sie auch Maple verwenden.)

### Aufgabe 2

Gegeben eine Markovkette mit Zustandsmenge  $\{S = \{0, 1, 2, \dots\}\}$ ,  $p_{n(n+1)} = 2/3$  und  $p_{n0} = 1/3$  für alle  $n \in S$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand  $i$  zu befinden?

### Aufgabe 3

Zwei Zustände  $A$  und  $B$  einer Markovkette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn  $A$  von  $B$  aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben eine Markovkette mit Zustandsmenge  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} .5 & .5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .3 & .7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .1 & 0 & .9 & 0 \\ .25 & .25 & 0 & 0 & .25 & .25 \\ 0 & 0 & .7 & 0 & .3 & 0 \\ 0 & .2 & 0 & .2 & .2 & .4 \end{pmatrix};$$

welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient? Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu befinden?

### Aufgabe 4

Betrachten Sie nochmals die Markovkette aus der letzten Aufgabe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu befinden, wenn wir im Zustand 5 starten? (Hinweis: Betrachten Sie zwei Teilmatrizen von  $M$ . Die eine,  $Q$ , stellt die Übergänge der transienten Klasse in sich selbst dar; die andere,  $S$ , die Übergänge von der transienten Klasse in die rekurrente. Die Inverse einer Matrix  $M$  kann mit Maples `LinearAlgebra[MatrixInverse](M)` Befehl berechnet werden.)

---

<sup>1</sup>Das Problem stammt aus der Anwendung von Markovketten in der Bioinformatik beim Finden von Genen in Genomsequenzen.