
Algorithmische Bioinformatik II

Abgabetermin: Dienstag, den 4. Juni um 10¹⁵ in der Vorlesung

Aufgabe 1

Sei (V, M, F) eine Eingabe für das *Bounded Degree Interval Sandwich Problem*, wobei

$$\begin{aligned} V &= \{0, \dots, 9\}, \\ M &= \left\{ \{0, 2\}, \{0, 4\}, \{0, 6\}, \{0, 9\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}, \{1, 7\}, \right. \\ &\quad \left. \{2, 9\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}, \{6, 8\} \right\}, \\ F &= \left\{ \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 8\} \right\}. \end{aligned}$$

Ist $V' = \{0, 1, 4, 6, 8, \} \subsetneq V$ bzw. V für $d = 4$ ein zulässiger Kern? Gib dazu eine Folge zulässiger Kern-Paare an, die jeweils das vorherige Kern-Paar um ein Element erweitern, oder eine Begründung, warum es keine solche Folge geben kann.

HINWEIS: Man kann entweder alle $\Theta(n^{d-1})$ mögliche Kerne ausprobieren (sic!) oder erst eine schöne Zeichnung des Graphen finden (.

Aufgabe 2

Zeige, dass es genau $\prod_{i=2}^n (2i-3)$ verschiedene ungeordnete, erweiterte binäre evolutionäre Bäume für n Spezies gibt.

ERINNERUNG: In einem evolutionären Baum mit n Blättern sind die internen Knoten unmarkiert und der Einfachheit halber sind den Blätter die Elemente aus $[1 : n]$ bijektiv zugeordnet.

Ein binärer Baum heißt *erweitert*, wenn er keinen Knoten mit genau einem Kind besitzt. Ein binärer Baum heißt *geordnet*, wenn die Reihenfolge der Kinder eines Knotens vorgegeben ist, andernfalls heißt er *ungeordnet*.

Freiwillige Zusatzaufgabe: Zeige, dass es genau $\frac{n!}{n} \binom{2(n-1)}{n-1}$ verschiedene geordnete, erweiterte binäre (evolutionäre) Bäume für n Spezies gibt.

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \{(x_1, x_2, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : x_i \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller reellen Folgen. Wir definieren $\delta(x, y) = 2^{-n(x,y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, wobei $n(x, y) = \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \forall j \in [1 : i] : x_j = y_j\}$.

Beweise oder widerlege: δ ist eine Ultra-Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.